

MATEMÁTICA GERAL

Introdução ao Cálculo Matricial (v1.02)

Vítor Caetano

Julho de 2012

Resumo

O presente documento de introdução ao cálculo matricial, foi elaborado para servir de apoio ao módulo de Matemática Geral do Centro de Formação Profissional da Indústria Metalúrgica e Metalomecânica (CENFIM). O propósito deste texto é expor de uma forma clara e objetiva, sem perder o rigor científico, o conceito de matriz, suas principais propriedades algébricas e aplicações na resolução de sistemas de equações lineares, usando tanto quanto possível exemplos concretos sob a forma de exercícios.

1 Introdução

O conceito de matriz, pela sua eficiência, poder e utilidade dá origem a uma das mais importantes ferramentas da matemática. A álgebra matricial possui inúmeras aplicações nas mais variadas áreas, que vão desde a resolução de sistemas de equações lineares a aplicações nos mais variados domínios da física, passando pelo campo das ciências de gestão e investigação operacional.

Matrizes são objetos matemáticos que contêm números dispostos em quadros bidimensionais organizados em linhas e colunas. Estas têm variadas designações relativas à sua forma, constituição e propriedades algébricas. A álgebra das matrizes tem um papel fundamental na resolução de problemas, quer em vários outros domínios da matemática, em inúmeros problemas da física, em variadas aplicações computacionais e até em situações quotidianas, justificando-se desta forma o seu estudo de um ponto de vista geral.

2 Generalidades

2.1 Definição de Matriz

Designa-se por **Matriz** $m \times n$ de números reais ou apenas Matriz real todo o quadro com m linhas e n colunas, com $m \times n$ elementos que podem ser números ou expressões numéricas a todo o quadro do tipo representado em Eq. 1.

Neste quadro podemos distinguir filas horizontais que designamos por **Linhas**, e filas verticais que designamos por **Colunas**. Os índices, que afetam os elementos referem a posição deles dentro da matriz: o primeiro

índice (genericamente representado por i), indica a linha a que pertence o elemento e o segundo índice (genericamente representado por j), indica a que coluna pertence o elemento em questão. Aos **Elementos** de uma matriz também se pode chamar **Entradas** da matriz ou **Componentes** da matriz.

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) são números reais. Se os elementos a_{ij} da matriz ao invés de estarem restringidos aos números reais, poderem ser números complexos então a matriz designa-se por **Matriz** de números complexos.

É importante caracterizar estas estruturas e como tal, conhecer o número de linhas e o número de colunas numa matriz. Assim, diz-se que a matriz tem **Dimensão** $m \times n$ se tem m linhas e n colunas. Se $m \neq n$ está-se perante uma **Matriz Retangular**, se $m = n$ trata-se de uma **Matriz Quadrada**. Neste último caso, em vez de se dizer que a matriz tem dimensão $m \times n$, diz-se que a matriz é de **Ordem** n .

✧ Exemplo 1.

Considere-se a matriz real A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & \frac{1}{4} & -10 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

Trata-se de uma matriz constituída por quatro linhas e quatro colunas, portanto tem de dimensão 4×4 , sendo uma matriz quadrada de ordem 4, em que $a_{12} = 0$; $a_{14} = 3$; $a_{24} = -10$; $a_{32} = 8$; $a_{44} = -\frac{5}{3}$.

✧ Exemplo 2.

Considere-se a matriz real B :

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -t \\ \frac{6}{11} & -15 \\ t+3 & t \\ 71 & 2t+1 \\ 0 & \sqrt{t} \end{bmatrix}$$

Trata-se de uma matriz constituída por cinco linhas e duas colunas, portanto é uma matriz retangular de dimensão 5×2 , em que $b_{12} = -t$; $b_{21} = \frac{6}{11}$; $b_{32} = t$; $b_{31} = t + 3$; $b_{51} = 0$.

∞ . . . ∞

Exercício 1.

Considere-se a matriz real M :

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -10 & -x & x+y & 6 & 0 \\ 7 & 1 & \frac{4}{5} & -y & x & -\frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

- (a) Quantas linhas tem a matriz M ?
- (b) Quantas colunas tem a matriz M ?
- (c) Qual é a dimensão da matriz M ?
- (d) Indique os valores das entradas: m_{12} , m_{22} , m_{14} , m_{23} e m_{25} .

2.2 Nomenclatura das Matrizes

Como já foi referido na secção anterior, uma matriz designa-se **Matriz de Números Reais** ou simplesmente **Matriz real** se os seus elementos são números reais, por outro lado se os seus elementos poderem ser números complexos a matriz designa-se **Matriz de Números Complexos** ou apenas **Matriz Complexa**.

◇ **Exemplo 3.**

Considerem-se as matrizes A e B :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -i & 1 & -3+2i & 1 \\ 0 & 2i & i & -3i \\ 5 & i & \sqrt{2}i & 0 \end{bmatrix}$$

- A é uma Matriz Real
- B é uma Matriz Complexa

∞ . . . ∞

Quanto à forma da matriz, se esta tem apenas uma linha designa-se **Matriz Linha** ou apenas **Vetor linha**, se tem apenas uma coluna trata-se duma **Matriz Coluna** ou simplesmente **Vetor Coluna**, portanto as Matrizes Linha e Matrizes Coluna são **Matrizes Vetor**. Se uma matriz tem o mesmo número de linhas e de colunas é designada de **Matriz Quadrada**, por outro lado, se o número de linhas e o número de colunas são diferentes, diz-se **Matriz Retangular**.

◇ **Exemplo 4.**

Sejam as matrizes C, D, E, F, G e H :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -10 & \sqrt{2} & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -\sqrt{5} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad H = [1 \quad -\sqrt{2} \quad 0]$$

- H é uma Matriz Linha ou Vetor Linha
- E, F são Matrizes Coluna ou Vetor Coluna
- E, F, H são Matrizes Vetores
- D, G são Matrizes Quadradas
- C, E, F, H são Matrizes Retangulares
- Todas são Matrizes Reais

∞ . . . ∞

Numa matriz quadrada, à diagonal constituída pelos elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ dá-se o nome de **Diagonal Principal**, estes elementos designam-se por **Elementos Principais**, esta diagonal está assinalada com círculos na matriz A do exemplo seguinte. À diagonal constituída pelos elementos $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ dá-se o nome de **Diagonal Secundária**, esta está assinalada com retângulos na matriz B no exemplo seguinte.

◇ **Exemplo 5.**

Considerem-se as matrizes A e B :

$$A = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 4 & \textcircled{6} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} & \textcircled{3} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 24 & \boxed{7} \\ 0 & \boxed{-3} & -1 \\ \boxed{15} & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$$

- Os elementos a_{11}, a_{22} e a_{33} constituem a Diagonal Principal da matriz A , estes estão assinalados com círculos.
- Os elementos b_{13}, b_{22} e b_{31} constituem a Diagonal Secundária da matriz B , estes estão assinalados por retângulos.

∞ . . . ∞

Quando uma matriz é constituída por elementos que são todos nulos, esta será uma **Matriz Nula**. Se todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos a matriz designa-se **Matriz Triangular Superior**, se pelo contrário, todos os elementos acima da diagonal principal são nulos, esta será uma **Matriz Triangular Inferior**. Se são nulos todos os elementos fora da diagonal principal, trata-se de uma **Matriz Diagonal**, portanto, uma matriz diagonal é simultaneamente uma matriz triangular superior e triangular inferior. Por outro lado, uma matriz diagonal que tem todos elementos da diagonal principal iguais designa-se **Matriz Escalar**.

◇ **Exemplo 6.**

Considerem-se as matrizes P, Q, R, S, T, U, V, W e X :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- P é uma Matriz Nula
- Q, R, S, U, V, X são Matrizes Triangulares Superiores
- S, T, V, W são Matrizes Triangulares Inferiores
- Q, S, V são Matrizes Diagonal
- S, V são Matrizes Escalares
- Todas exceto a P são Matrizes Quadradas
- Todas são Matrizes Reais

∞ . . . ∞

Exercício 2.

Considerem-se as seguintes matrizes A, B, C, D, E e F :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

- Quais as matrizes que são quadradas?
- Quais as matrizes que são diagonais?
- Quais as matrizes que são triangulares superiores?
- Quais as matrizes que são triangulares inferiores?
- Quais as matrizes que são escalares?
- Quais as matrizes que são nulas?

Uma matriz quadrada cujos elementos estão dispostos simetricamente relativamente à diagonal principal da matriz designa-se por **Matriz Simétrica**. Se os elementos da diagonal principal duma matriz são todos iguais à unidade e os restantes elementos da matriz são todos nulos, trata-se duma **Matriz Identidade**, como tal, uma matriz identidade é um caso particular duma matriz escalar e também duma matriz diagonal.

Exemplo 7.

sejam as matrizes I, J, K, L, M e N :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & -5 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -6 \\ -8 & -4 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-\sqrt{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- I, J, K, L, N são Matriz Simétricas
- L é uma Matrizes Identidade de segunda ordem
- I é uma Matrizes Identidade de terceira ordem
- N é uma Matrizes Identidade de quarta ordem
- I, L, N são Matrizes Triangulares Superiores

- I, L, M, N são Matrizes Triangulares Inferiores
- I, L, N são Matrizes Escalares
- Todas estas Matrizes são Quadradas
- Todas estas Matrizes são Reais

∞ . . . ∞

Exercício 3.

Considerem-se as matrizes reais P, Q, R, S, T, U, V, W e X :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} -100 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & \sqrt{5} \\ -3 & \sqrt{5} & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

- Quais as matrizes que são simétricas?
- Como se designa a matriz P ?
- Como se designa a matriz T ?
- Como se designa a matriz U ?
- Como se designa a matriz X ?
- Como se designa a matriz V ?
- Quais as matrizes que são triangulares superiores?
- Quais as matrizes que são triangulares inferiores?
- Qual é a dimensão da matriz V ?
- Quais as matrizes que são nulas?
- Indique os valores das entradas: $t_{12}, t_{33}, p_{13}, r_{21}, v_{41}, w_{32}, x_{33}, u_{23}$ e s_{22} .
- Escreva uma matriz H , quadrada de terceira ordem, simétrica e em que $h_{12} = -2, h_{22} = 0$ e $h_{32} = \sqrt{3}$.

Exercício 4.

- Construa uma matriz $M_{4 \times 4}$, tal que as suas entradas se obtenham com o elemento genérico,

$$m_{ij} = \begin{cases} m_{ij} = 0 & \Leftarrow i < j \\ m_{ij} = 1 & \Leftarrow I = j \\ m_{ij} = -2 & \Leftarrow i > j \end{cases}$$

- Construa uma matriz $N_{4 \times 5}$, em que os seus elementos são calculados pela expressão,

$$n_{ij} = (-1)^{i+j} |i + j|$$

Exercício 5.

Considere a matriz real W :

$$W = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$$

- (a) Suponha que, $a = b = e = f = 2$ e $c = i = -4$. Nesse caso indique valores possíveis para d, g e h de forma a que a matriz W seja simétrica.
- (b) Ainda na situação da alínea anterior, indique valores possíveis para d, g e h de forma a que a matriz W seja triangular superior.
- (c) Suponha que, $a = -3, b = c = e = f = 0$ e $i = 1$. Nesse caso indique valores possíveis para d, g e h de forma a que a matriz W seja simétrica.
- (d) Suponha que, $a = -3, b = c = e = f = 0$ e $i = 1$. Nesse caso indique valores possíveis para d, g e h de forma a que a matriz W seja triangular inferior.
- (e) Ainda na situação da alínea anterior, indique valores possíveis para d, g e h de forma a que a matriz W seja diagonal.
- (f) Suponha agora que, $a = e = 1$ e $b = c = d = g = 0$. Nesta situação indique valores possíveis para f, h e i de forma a que a matriz W seja triangular inferior, não sendo uma matriz diagonal.
- (g) Suponha agora que, $a = e = 1$ e $b = c = d = g = 0$. Nesta situação indique valores possíveis para f, h e i de forma a que a matriz W seja triangular superior, não sendo uma matriz diagonal.
- (h) Suponha agora que, $a = e = 1$ e $b = c = d = g = 0$. Nesta situação indique valores possíveis para f, h e i de forma a que a matriz W seja diagonal, não sendo uma matriz escalar.
- (i) Ainda na situação da alínea anterior, indique valores possíveis para f, h e i de forma a que a matriz W seja uma matriz identidade.

3 Álgebra de Matrizes

Após se ter visto na secção anterior alguns dos tipos de matrizes que existem, nesta vamos tratar da álgebra de matrizes, ou seja, veremos algumas operações que se podem realizar com elas. As operações que veremos são: adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar (número real) e multiplicação entre matrizes.

3.1 Adição de Matrizes

A adição ou soma de duas matrizes A e B cujas entradas genéricas são a_{ij} e b_{ij} , respetivamente, é uma matriz C de entradas genéricas c_{ij} , tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. No fundo, perante esta definição de adição de matrizes, somam-se os elementos que estão na mesma posição em

cada uma das matrizes, ou seja, somam-se os **elementos homólogos**. Nestas condições fica claro que apenas se podem adicionar matrizes com a mesma dimensão e a matriz resultante da soma será também ela uma matriz com a mesma dimensão das matrizes que foram somadas. De outra forma haveria elementos de uma e/ou de outra matriz que não teriam os correspondentes elementos homólogos para se adicionar. Pode-se esquematizar de uma forma genérica a adição de matrizes da seguinte forma:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \tag{2}$$

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

✦ **Exemplo 8.**

Considerem-se as matrizes A e B , pretende-se calcular a matriz C , tal que $C = A + B$:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 8 & 11 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 7 \\ -5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -4+5 & 0+2 & 5+1 \\ 1+0 & -1+1 & 0-3 \\ 0-1 & -3+2 & 2+7 \\ 8-5 & 11+9 & -2+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 9 \\ 3 & 20 & 8 \end{bmatrix}$$

- É importante salientar que apenas se pode efetuar a soma das matrizes A e B , porque estas tinham igual dimensão (4×3)
- Observe-se que a matriz resultante C , tem a mesma dimensão que as matrizes adicionadas A e B

∞ . . . ∞

✦ **Exemplo 9.**

Soma de duas matrizes de dimensão (3×3).

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 6 \\ 4 & 7 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -1 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

∞ . . . ∞

✧ **Exemplo 10.**

Soma de uma matriz $A_{2 \times 3}$ com uma matriz nula $0_{2 \times 3}$:
Seja a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Então a soma da matriz A com uma matriz nula de igual dimensão será:

$$A + 0_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix} = A$$

Uma vez definida a adição de matrizes da mesma dimensão, pode-se concluir que esta goza das mesmas propriedades da adição de números reais:

- i A adição de matrizes é associativa, isto é:
 $A + (B + C) = (A + B) + C$
- ii A adição de matrizes é comutativa, isto é: $A + B = B + A$
- iii Existe uma matriz nula $0_{m \times n}$, que é o elemento neutro para a adição de matrizes de dimensão $(m \times n)$, isto é:
 $A_{m \times n} + 0_{m \times n} = A_{m \times n}$
- iv Existência de elemento simétrico, ou seja, para cada matriz A , existe uma matriz $-A$, tal que: $A + (-A) = 0$.
A matriz $-A$ pode ser obtida multiplicando o número real (-1) pela matriz A , operação que será definida na próxima secção.

✎ **Exercício 6.**

Considerem-se as matrizes reais P, Q, R, S, T, U, V, W e X :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 5 \\ 10 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 5 & 4 \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Efetue, se for possível, as seguintes somas de matrizes:

- (a) $S + Q$
- (b) $P + U$
- (c) $V + W$
- (d) $S + V$
- (e) $T + U$
- (f) $R + X$
- (g) $T + P + U$
- (h) $P + 0_{3 \times 3}$

3.2 Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

Neste estudo consideraremos que o escalar é sempre um número real, de qualquer forma fica a nota de que todo o desenvolvimento é semelhante se o escalar for um número complexo.

O resultado da multiplicação de uma matriz A , de entradas genéricas a_{ij} , por um número real λ , é uma matriz com a dimensão da matriz A de elemento genérico λa_{ij} , ou seja, para se multiplicar um número real por uma matriz, multiplica-se cada entrada da matriz por esse número real, ficando a matriz resultante com a mesma dimensão da matriz inicial.

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

✧ **Exemplo 11.**

Seja a matriz A , pretende-se calcular a matriz resultante da multiplicação da matriz A pelo número real 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$2A = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -6 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times (-1) & 2 \times 0 & 2 \times 2 & 2 \times 2 & 2 \times (-3) \\ 2 \times (-2) & 2 \times (-1) & 2 \times 0 & 2 \times 1 & 2 \times (-6) \\ 2 \times (-3) & 2 \times (-1) & 2 \times 2 & 2 \times 0 & 2 \times (-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 & 4 & -6 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & -3 \\ -6 & -2 & 4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$$

✧ **Exemplo 12.**

Multiplicação de um número real por uma matriz:

$$-4 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 6 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \times 2 & -4 \times 0 & -4 \times 0 \\ -4 \times (-1) & -4 \times (-4) & -4 \times 6 \\ -4 \times (-3) & -4 \times 1 & -4 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & -24 \\ 12 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

A multiplicação de um número real por uma matriz obedece às seguintes propriedades:

- i A multiplicação de números reais é distributiva em relação à adição de matrizes, isto é:
 $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

- ii A multiplicação de matrizes por números reais é distributiva relativamente à adição de números reais, isto é: $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- iii Associatividade entre a multiplicação de números reais e multiplicação de números reais por matrizes: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- iv O número real 1, é elemento neutro quanto à multiplicação de números reais por matrizes, isto é: $1A = A$

Todas estas propriedades se podem provar facilmente recorrendo à definição de adição de matrizes e suas propriedades, e também às propriedades da multiplicação e adição de números reais.

Chama-se **Matriz Simétrica** de A , à matriz $(-A)$, isto é, a matriz obtida multiplicando o escalar (-1) por todos os elementos da matriz A . Pode dizer-se que a matriz simétrica da matriz A , é uma matriz que tem os elementos homólogos simétricos aos da matriz A . Chama-se a atenção para não se confundir este conceito de simetria, relativamente aos elementos da matriz, com o conceito de simetria relativamente à diagonal principal definido na secção anterior.

✧ **Exemplo 13.**

Seja a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -7 \\ -3 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Determinar a matriz simétrica $(-A)$.

$$\begin{aligned} -A &= (-1) \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -1 & 6 & -7 \\ -3 & 2 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-1) \times 5 & (-1) \times 0 & (-1) \times (-2) \\ (-1) \times (-1) & (-1) \times 6 & (-1) \times (-7) \\ (-1) \times (-3) & (-1) \times 2 & (-1) \times 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & -6 & 7 \\ 3 & -2 & -12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Neste ponto estamos em condições de definir a operação de subtração de matrizes. Esta pode ser definida recorrendo à multiplicação de números reais por matrizes e à adição de matrizes da seguinte forma:

$$A - B = A + (-B)$$

Ou seja, para subtrair matrizes, basta adicionar a primeira com a simétrica da segunda matriz. Como é facilmente compreensível, só se podem subtrair matrizes de igual dimensão e a matriz resultante terá dimensão igual à dimensão das duas matrizes que foram subtraídas.

✧ **Exemplo 14.**

Sejam as matrizes P e Q :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Determinar $P - Q$.

$$\begin{aligned} P - Q &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & -3 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Também é possível definir a divisão de uma matriz por um número real. Esta operação pode ser definida recorrendo à multiplicação de um número real por uma matriz e à existência de inverso de um número real. Ou seja, para dividir uma matriz por um número real, basta multiplicar a matriz pelo inverso do número real pelo qual se pretende dividir a matriz. Como todos os números reais exceto zero têm inverso esta operação fica definida para todos os números reais exceto zero.

$$\frac{A}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} A, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

✧ **Exemplo 15.**

Seja a matriz P :

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar $\frac{P}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{P}{2} &= \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-4}{2} & \frac{0}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

✧ **Exemplo 16.**

Sejam as matrizes A, B e C :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar $A + 3B - 2C$.

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + (-1) \times 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 9 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 6 & 18 \\ -3 & 0 & 3 \\ -6 & 6 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -8 & 9 & 20 \\ -2 & 0 & -1 \\ -6 & 0 & 29 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

∞ . . . ∞

Exercício 7.

Considerem-se as matrizes reais P, Q, R, X, Y e Z :

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 4 \\ 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

Efetue, se for possível, as seguintes operações:

- (a) $P + Q + R$
- (b) $P - Q$
- (c) $P + 4Q - R$
- (d) $P - Z$
- (e) $X + Y$
- (f) $X - Z$
- (g) $X - Y$
- (h) $X + Y + Z$
- (i) $Z - 4Y$
- (j) $4Y - X + 2Z$
- (k) $Y + \frac{1}{4}Z$

3.3 Multiplicação de Matrizes

Considere-se uma matriz $A_{(m \times p)}$ de dimensão $m \times p$ e uma matriz $B_{(p \times n)}$ de dimensão $p \times n$. Assim, será

$$A = [a_{ij}] \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p)$$

$$B = [b_{hk}] \quad (h = 1, 2, \dots, p; k = 1, 2, \dots, n)$$

em que o número de colunas de $A_{(m \times p)}$ é igual ao número de linhas de $B_{(p \times n)}$. Apenas neste caso é possível efetuar-se o produto da matriz A pela matriz B , e o resultado será

a matriz $C_{(m \times n)} = A_{(m \times p)}B_{(p \times n)}$, de dimensão $m \times n$, com elemento genérico c_{ik} dado por,

$$c_{ik} = \sum_{s=1}^p a_{is}b_{sk} \tag{4}$$

Desta definição resulta que a multiplicação de duas matrizes se obtém multiplicando linhas da primeira matriz por colunas da segunda. Assim, para se obter a entrada c_{ik} da matriz resultante (matriz produto), multiplica-se a linha i da primeira matriz, pela coluna k da segunda (matrizes fator), do seguinte modo: multiplica-se o primeiro elemento da linha i da matriz A pelo primeiro elemento da coluna k da matriz B , o segundo elemento da linha i da matriz A pelo segundo elemento da coluna k da matriz B , assim sucessivamente até ao fim da linha i da matriz A e da coluna k da matriz B , somando-se no fim todos os produtos parciais obtidos. Portanto, uma linha do primeiro fator deverá ter tantos elementos como uma coluna do segundo fator.

Como na multiplicação matricial se multiplicam linhas da primeira matriz por colunas da segunda, a matriz resultante terá dimensão $m \times n$, isto é, terá tantas linhas como o primeiro fator e tantas colunas como o segundo fator.

Resumindo, resulta do exposto atrás sobre o produto matricial os seguintes pontos:

- **Apenas se podem multiplicar matrizes se o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda**
- **O produto matricial obtém-se multiplicando as linhas da primeira matriz pelas colunas da segunda**
- **A matriz produto terá tantas linhas como a primeira matriz fator e tantas colunas como a segunda**

◇ **Exemplo 17.**

Pretende-se multiplicar uma matriz A de dimensão 4×3 , por uma matriz B de dimensão 3×2 . Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinar o produto $C = AB$.

$$(\textcircled{4} \times 3) \quad (3 \times \textcircled{2}) = (\textcircled{4} \times \textcircled{2})$$

Observe-se que apenas é possível multiplicar a matriz A pela matriz B , porque a matriz A tem três linha e a matriz B igual número de colunas. A matriz C , matriz produto, terá dimensão 4×2 , ou seja, tantas linhas como A e tantas colunas como B .

As entradas da matriz C serão calculadas de acordo com a expressão Eq. 4, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{s=1}^3 a_{1s}b_{s1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ &= 2 \times 0 + (-1) \times (-5) + 5 \times (-2) \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \sum_{s=1}^3 a_{1s}b_{s2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ &= 2 \times 4 + (-1) \times 1 + 5 \times 5 \\ &= 32 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{21} &= \sum_{s=1}^3 a_{2s}b_{s1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ &= -2 \times 0 + 5 \times (-5) + 0 \times (-2) \\ &= -25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{22} &= \sum_{s=1}^3 a_{2s}b_{s2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ &= -2 \times 4 + 5 \times 1 + 0 \times 5 \\ &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{31} &= \sum_{s=1}^3 a_{3s}b_{s1} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} \\ &= 2 \times 0 + (-2) \times (-5) + (-1) \times (-2) \\ &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{32} &= \sum_{s=1}^3 a_{3s}b_{s2} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \\ &= 2 \times 4 + (-2) \times 1 + (-1) \times 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{41} &= \sum_{s=1}^3 a_{4s}b_{s1} = a_{41}b_{11} + a_{42}b_{21} + a_{43}b_{31} \\ &= 0 \times 0 + (-3) \times (-5) + 4 \times (-2) \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{42} &= \sum_{s=1}^3 a_{4s}b_{s2} = a_{41}b_{12} + a_{42}b_{22} + a_{43}b_{32} \\ &= 0 \times 4 + (-3) \times 1 + 4 \times 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Por fim pode-se escrever a matriz produto C , colocando os elementos c_{ik} previamente calculados nas posições correspondentes.

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 32 \\ -25 & -3 \\ 12 & 1 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

❖ **Exemplo 18.**

Sejam as matrizes D e E , se possível, pretende-se calcular a matriz produto $F = DE$.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 0 + 0 \times 4 & 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 7 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 0 + 4 \times 4 & 2 \times 5 + 3 \times 2 + 4 \times 7 & 2 \times 1 + 3 \times 3 + 4 \times 1 \\ 1 \times 2 + 1 \times 0 + 8 \times 4 & 1 \times 5 + 1 \times 2 + 8 \times 7 & 1 \times 1 + 1 \times 3 + 8 \times 1 \end{bmatrix}$$

A matriz $F_{(3 \times 3)}$ será,

$$F = DE = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 7 \\ 20 & 44 & 15 \\ 34 & 63 & 12 \end{bmatrix}$$

∞ . . . ∞

Desde que as dimensões das matrizes sejam tais que as operações indicadas façam sentido, o produto matricial obedece às seguintes propriedades:

- i A multiplicação matricial em geral não é comutativa, isto é, $AB \neq BA$. Basta reparar que em muitas situações é possível calcular AB , mas é impossível calcular BA , devido às dimensões das matrizes não serem apropriadas. Mesmo quando é possível calcular estes dois produtos, em geral são diferentes.
- ii A multiplicação de matrizes é associativa, isto é: $(AB)C = A(BC)$.
- iii A multiplicação de matrizes e multiplicação de matrizes por escalares é associativa, ou seja, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
- iv O produto de matrizes é distributivo em relação à soma, isto é; $A(B+C) = AB+AC$ e $(B+C)A = BA+CA$.
- v Existência elemento neutro. O produto de qualquer matriz A pela matriz identidade I_n de dimensão apropriada, tem como resultado a matriz A , ou seja, $AI = IA = A$.

Após ter-se definido a multiplicação de matrizes, está-se em condições de definir a operação de potência de ordem k numa matriz quadrada $A_{(n \times n)}$.

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fatores}}$$

Repare-se que A^k só é possível se A for uma matriz quadrada. Além disso, por definição $A^0 = I_n$, em que n é a ordem da matriz A .

❖ **Exemplo 19.**

Determinar o cubo de uma matriz quadrada de terceira ordem.

Sejam a matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pretende-se determinar A^3 .

$$\begin{aligned}
 A^3 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}^3 \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & -2 & -4 \\ 16 & 4 & 6 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -21 & -2 & 12 \\ 0 & 6 & 46 \\ 26 & -10 & -26 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercício 8.

Considerem-se as matrizes reais P, Q , e R :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Calcule as seguintes potências de matrizes:

- (a) P^4
- (b) Q^3
- (c) R^2

Exemplo 20.

Sejam as matrizes A, B, C, D, E, F, G e H :

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \\
 E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} \\
 I &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad K = [4 \quad -1 \quad 2]
 \end{aligned}$$

Pretende-se calcular os resultados das seguintes operações:

- (a) Determinar a matriz resultante do produto da matriz A pela matriz B :

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} + 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1+4\sqrt{2}}{2} & -2\sqrt{2} \\ \frac{-1+6\sqrt{2}}{2} & -3\sqrt{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- (b) Determinar a matriz resultante do produto AD :

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ -1+3\lambda \end{bmatrix}$$

- (c) Determinar o produto da matriz E pela matriz identidade I :

$$\begin{aligned}
 EI &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = E
 \end{aligned}$$

- (d) Calcular a multiplicação da matriz E pelo vetor coluna G :

$$EG = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- (e) Determinar a matriz que resulta do produto da matriz E pelo vetor coluna H :

$$\begin{aligned}
 EH &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+2t \\ -t-2t+2t \\ -3t-2t \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3t \\ -t \\ -5t \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- (f) Pretende-se calcular o produto da matriz E pela matriz coluna J de incógnitas x, y e z :

$$\begin{aligned}
 EJ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times x + 0 \times y + 1 \times z \\ -1 \times x + 2 \times y + 1 \times z \\ 0 \times x + 3 \times y - 1 \times z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+z \\ -x+2y+z \\ 3y-z \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observe-se que a matriz resultante é um vetor coluna, ou seja, uma matriz de dimensão (3×1) .

- (g) Determinar o resultado da multiplicação do vetor linha K pelo vetor coluna G :

$$\begin{aligned}
 KG &= [4 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= 4 \times (-1) + (-1) \times 0 + 2 \times 3 = 2
 \end{aligned}$$

Observe-se que o resultado deste produto é um escalar, ou uma matriz de dimensão (1×1) no conceito generalizado de matriz.

- (h) Determinar o produto do vetor coluna G pelo vetor linha K , ou seja, o contrário da alínea anterior, observe-se que o resultado é totalmente diferente.

$$\begin{aligned}
 GK &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} [4 \quad -1 \quad 2] \\
 &= \begin{bmatrix} (-1) \times 4 & (-1) \times (-1) & (-1) \times 2 \\ 0 \times 4 & 0 \times (-1) & 0 \times 2 \\ 3 \times 4 & 3 \times (-1) & 3 \times 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- (i) Determinar a matriz resultante de $(CF + A)D$.

$$(CF + A)D = CFD + AD =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & 19 \\ -9 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ -1+3\lambda \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 9+19\lambda \\ -9-10\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+2\lambda \\ -1+3\lambda \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 10+21\lambda \\ -10-7\lambda \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

A matriz resultante é um vetor coluna de dimensão (2×1) .

(j) Determinar a matriz resultante de $FC - 3E$.

$$\begin{aligned}
 FC - 3E &= \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \\ -1 & -13 & 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \\ -1 & -13 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 3 & -6 & -3 \\ 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 5 & -8 & 4 \\ -1 & -22 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

(k) Determinar a matriz resultante de $E^2 - 2IGK$.

$$\begin{aligned}
 E^2 - 2IGK &= EE - 2GK = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -24 & 6 & -12 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 9 & 1 & 4 \\ -3 & 7 & 0 \\ -27 & 9 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Observe-se que a matriz identidade I multiplicada por qualquer matriz tem como resultado a própria matriz, portanto $IG = G$.

(l) Determine uma matriz M , tal que: $3A - 2M = 4I_2$

Começando por resolver a equação matricial em ordem a M .

$$\begin{aligned}
 3A - 2M &\Leftrightarrow 4I_2 \\
 -2M &\Leftrightarrow 4I_2 - 3A \\
 2M &\Leftrightarrow -4I_2 + 3A \\
 M &\Leftrightarrow -2I_2 + \frac{3}{2}A
 \end{aligned}$$

Agora pode-se calcular explicitamente a matriz M .

$$\begin{aligned}
 M &= -2I_2 + \frac{3}{2}A \\
 &= -2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Exercício 9.

Considere as matrizes seguintes:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine:

- (a) $X + Y$
- (b) $X + Y - Z$
- (c) $2X$
- (d) $3X + 5Y - Z$
- (e) $X(Y + Z)$
- (f) $XYZ - YZ$

Exercício 10.

Considere a matriz M :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Calcule o seguinte produto de matrizes, e indique sumariamente as transformações que ocorrem na matriz M :

- (a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
- (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
- (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
- (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$
- (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) Indique produto matriciais em que um dos fatores seja a matriz M e o resultado desses produtos sejam as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 7 & 5 \\ 12 & 10 & 11 & 9 \\ 16 & 14 & 15 & 13 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 26 & 0 \\ 0 & 0 & 42 & 0 \\ 0 & 0 & 58 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 \\ 5 & 6 & 26 & 8 \\ 9 & 10 & 42 & 12 \\ 13 & 14 & 58 & 16 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 10 & 9 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

Exercício 11.

Considerem-se as matrizes reais $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M, N$ e P :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} -2t \\ 3t \\ t \end{bmatrix} \quad L = [1 \quad 2 \quad -2]$$

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -3 \\ -\sqrt{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Efetue, se for possível, as seguintes operações:

- (a) AB
- (b) BA
- (c) AD
- (d) AC
- (e) EF
- (f) EG
- (g) EK
- (h) EJ
- (i) LH
- (j) HL
- (k) LF

- (l) EP
- (m) P^2
- (n) EPF
- (o) $AD+BC$
- (p) B^2D-2I_2AD
- (q) $MN-3A^2$
- (r) $EH-2FG$
- (s) I_3FHL
- (t) E^2-2F
- (u) $-NMG+3EH$
- (v) Determine a matriz Z tal que:

$$MN+3Z=2I_2+Z$$

Exercício 12.

Considere a matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz B , de forma a que seja verdadeira a igualdade: $B^2 = A$

Exercício 13.

Considere as matrizes A, B e C :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz X , de forma a que seja verdadeira a igualdade:

$$\frac{X-A}{2} = \frac{B+X}{3} + C$$

Exercício 14.

Sabendo que as matrizes V e W têm dimensão (2×3) , determine V e W de forma a que sejam respeitadas as seguintes igualdades:

$$2V+W = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad V-W = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercício 15.

Considere as matrizes A, B e C :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

(a) Determine a matriz Y de dimensão (2×3) tal que,

$$\frac{1}{2}(Y+A) = 3[Y+(A-Y)] + C$$

(b) Determine as matrizes X e Z ambas de dimensão (2×3) tais que,

$$\begin{cases} 2X - Z = A - B \\ X + Z = B - A \end{cases}$$

Exercício 16.

Considere uma dada empresa que fabrica três produtos **A**, **B** e **C**. Os custos em euros por unidade produzida inerentes a esses produtos estão divididos em três categorias: Matérias Primas, Mão de Obra e Outras Despesas, segundo os valores da Tabela: 1.

Custo por Unidade Produzida (€)			
Despesa em:	Produto		
	A	B	C
Matérias Primas	0.10	0.25	0.30
Mão-de-Obra	0.15	0.20	0.25
Outras Despesas	0.05	0.20	0.40

Tabela 1: Custo Unitário

Considere ainda que a procura destes três produtos varia muito ao longo do ano. E que a quantidade produzida de cada produto por estação do ano é dada pela Tabela: 2.

Quantidade Produzida por Estação do Ano				
Produto	Estação			
	Inverno	Primavera	Verão	Outono
A	250	250	250	250
B	100	50	50	500
C	50	400	300	50

Tabela 2: Quantidades Produzidas

Essa empresa gostaria de apresentar aos seus acionistas uma única tabela com o custo total por estação das três categorias de custos consideradas: Matérias Primas, Mão-de-Obra e Outras Despesas. Como se pode obter tal resultado aplicando o cálculo matricial.

4 Método da Condensação. Característica de uma Matriz

4.1 Dependência e Independência Linear de Filas Paralelas de uma Matriz

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ um conjunto finito de vetores pertencentes a um qualquer espaço vetorial \mathbf{V} . E sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ um conjunto de n escalares não todos nulos, que neste texto serão sempre números reais. Diz-se

que $\vec{u} \in \mathbf{V}$ é uma **combinação linear** finita dos elementos $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, se \vec{u} for tal que

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \quad (5)$$

Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, podem ser qualquer conjunto de vetores no seu sentido mais geral de vetores, sejam eles vetores do plano bidimensional, de um espaço multidimensional, matrizes de um espaço matricial ou mesmo funções. No presente estudo iremos considerar apenas combinações lineares das linhas ou das colunas de matrizes, na maior parte das vezes das linhas.

Seja então o conjunto $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de vetores do espaço vetorial \mathbf{V} e n escalares reais $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Se a Equação 6 só possui a solução trivial, isto é, todos os λ_i são nulos, então S é um conjunto de vetores **linearmente independentes**. Pelo contrário se existe um conjunto de n λ_i sem que sejam todos nulos que verifique a Equação 6, então S é um conjunto de **vetores linearmente dependentes**.

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (6)$$

De outra maneira, se algum dos vetores de S é exprimível por uma combinação linear dos restantes vetores de conjunto S , então S é um conjunto de vetores linearmente dependentes. Por outro lado se nenhum vetor de S é possível de exprimir por uma combinação linear dos restantes, então S é um conjunto de vetores linearmente independentes.

Iremos agora particularizar o exposto para o caso em que o conjunto S é o conjunto das linhas de uma matriz. Considere-se a matriz A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (7)$$

E considerem-se as suas respetivas linhas

$$\begin{aligned} L_1 &= [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}] \\ L_2 &= [a_{21} \ a_{22} \ \dots \ a_{2n}] \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \\ L_n &= [a_{n1} \ a_{n2} \ \dots \ a_{nn}] \end{aligned} \quad (8)$$

Chamaremos combinação linear das linhas da matriz A , a uma expressão do tipo

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n$$

em que os $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são números reais. Diz-se que as linhas da matriz A são linearmente independentes se a única solução da equação

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \dots + \lambda_n L_n = \mathbf{0}_{(1 \times n)} \quad (9)$$

é tal que todos os λ_i são iguais a zero. Se existir outra solução desta equação, em que os λ_i não sejam todos nulos as linhas da matriz A são linearmente dependentes.

Esta definição, também no caso particular das linhas de uma matriz, leva a uma forma de ver o problema muitas vezes mais prática. Ou seja, se for possível exprimir alguma linha da matriz por uma combinação linear das restantes, as linhas da matriz são linearmente dependentes. Por outro lado se não é possível exprimir nenhuma linha da matriz por uma combinação linear das outras, então as linhas dessa matriz são linearmente independentes.

Todo o raciocínio exposto para as linhas de uma matriz também se pode fazer de forma igual para as colunas da matriz, portanto também se pode falar em colunas linearmente dependentes ou independentes. Os exemplos seguintes esclarecem de uma forma prática a dependência ou independência das linhas de uma matriz.

✧ **Exemplo 21.**

Sejam as matrizes A, B e C :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Vamos averiguar para estas três matrizes se as suas linhas são linearmente dependentes ou independentes, iremos chamar L_1, L_2 e L_3 à primeira, segunda e terceira linha da matriz em questão, respetivamente.

- Quanto à matriz A , as suas linhas são obviamente linearmente dependentes, pois basta notar que a segunda linha é o dobro da terceira, isto é, $L_2 = 2L_3$ ou mesmo $L_2 = 0 \times L_1 + 2 \times L_3$ esclarecendo que L_2 é uma combinação linear das restantes.
- A matriz B à primeira observação parece ter as linhas linearmente independentes pois não há nenhuma linha que seja múltipla duma outra, no entanto tal conclusão apenas pede retirar-se através do seguinte cálculo e como veremos esta primeira conclusão estava errada. De acordo com a definição da Eq. 9 podemos escrever

$$\lambda_1[-2 \ 0 \ 1] + \lambda_2[1 \ 3 \ 1] + \lambda_3[-3 \ 3 \ 3] = [0 \ 0 \ 0]$$

calcular os λ_1, λ_2 e λ_3 corresponde a resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

sistema este que tem infinitas soluções. Uma dessas soluções é por exemplo $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$, o que nos garante que as linhas da matriz B são linearmente dependentes, com efeito $2L_1 + L_2 = L_3$.

- Para a matriz C , como no caso anterior, de acordo com a definição da Eq. 9 podemos escrever

$$\lambda_1[0 \ -1 \ 2] + \lambda_2[-2 \ 1 \ 1] + \lambda_3[-2 \ 0 \ 5] = [0 \ 0 \ 0]$$

mais uma vez, calcular os λ_1, λ_2 e λ_3 corresponde a resolver o seguinte sistema,

$$\begin{cases} -2\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

sistema este que tem uma única solução $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 0$, portanto as linhas da matriz C são linearmente independentes.

∞ . . . ∞

4.2 Método da Condensação. Característica de uma Matriz

Vamos neste ponto expor um método que permite mais comodamente saber se as linhas de uma matriz são linearmente dependentes ou independentes, e mais do que isso, permite determinar qual o número máximo de linhas da matriz que são linearmente independentes. Este método é conhecido por **Método da Condensação**, Método da Condensação de Gauss ou simplesmente **Método de Gauss**.

O Método da Condensação de Gauss consiste em aplicar uma sequência de operações às linhas e às colunas de uma matriz, por forma a obter uma matriz triangular superior ou uma matriz em escada de linhas no caso da matriz original não ser quadrada, tais que, as sucessivas matrizes que se vão obtendo têm exatamente o mesmo número de linhas e de colunas linearmente independentes, este número designa-se por **característica de uma matriz** e geralmente é simbolizado pela letra r .

Designa-se por **matriz em escada de linhas**, uma matriz tal que por baixo do primeiro elemento não nulo de cada linha da matriz, e por baixo dos elementos anteriores da mesma linha, todas as entradas da matriz são nulas. Aos primeiros elementos significativos (não nulos) de cada linha chamamos **pivots** da matriz (assinalados com um **★** nas matrizes abaixo). O número de pivots de uma matriz também é igual à característica da matriz, e este número nunca ultrapassará o menor dos números entre o número de linhas e o número de colunas duma matriz.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Às operações efetuadas às linhas e às colunas de uma matriz, referidas acima, que não alteram a característica da matriz, ou seja, não alteram a dependência ou independência das linhas e colunas de uma matriz, dá-se o nome de **operações elementares**:

- (I) Troca de duas linhas da matriz.
- (II) Troca de duas colunas da matriz (quando se aplica esta operação elementar a matrizes de sistemas de equações é necessário ter em atenção a correspondente troca das variáveis do sistema).
- (III) Multiplicar uma linha da matriz por qualquer constante diferente de zero.
- (IV) Multiplicar uma coluna da matriz por qualquer constante diferente de zero (não se pode aplicar esta operação elementar a matrizes de sistemas de equações).
- (V) Substituir uma linha pela que se obtêm somando-a com uma outra multiplicada por uma constante qualquer.
- (VI) Substituir uma coluna pela que se obtêm somando-a com uma outra multiplicada por uma constante qualquer (não se pode aplicar esta operação elementar a matrizes de sistemas de equações).

Para se determinar a característica duma matriz pelo Método de Gauss é preciso condensar a matriz numa matriz equivalente em escada de linhas. Considere-se uma matriz genérica $A_{(m \times n)}$ não necessariamente quadrada.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Para iniciar o Método de Gauss começa-se por observar a entrada a_{11} da matriz, se esta tiver valor nulo então deve-se trocar a primeira linha por uma outra de forma a que o valor desta entrada fique diferente de zero, se possível, deverá ser trocada por uma linha que tenha o primeiro elemento igual à unidade ou o mais simples possível, realizando assim uma operação elementar do tipo I.

Quando a entrada a_{11} é já um valor não nulo, este é o pivot da primeira linha, deve-se multiplicar toda a linha por fatores convenientes de forma a que estes produtos adicionados às outras linhas anulem os primeiros elementos de todas as linhas abaixo da primeira, constituindo estes cálculos operações elementares do tipo III. Depois de anulados todos os elementos abaixo da entrada a_{11} , obtêm-se uma matriz da forma da matriz B seguinte.

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Nesta segunda fase do método, debruçemo-nos sobre a segunda coluna da matriz B , se esta coluna tiver todos os elementos à parte do primeiro iguais a zero, passa-se

para a coluna seguinte e assim sucessivamente até encontrar uma coluna que não tenha todos os elementos nulos abaixo do primeiro, seja esta a coluna k . Encontrada essa coluna, observa-se o seu segundo elemento e se este for nulo, troca-se a segunda linha com uma linha abaixo dela que tenha um elemento não nulo na coluna k , ficando assim um valor não nulo na segunda entrada desta coluna, este é já o pivot da segunda linha. Agora procede-se como se fez com a primeira coluna, multiplicando-se toda a segunda linha por fatores convenientes, tais que, quando adicionadas às restantes linhas abaixo da segunda anulem todos os elementos da matriz abaixo do pivot da coluna k . Obtendo-se nesta fase uma matriz C da forma:

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,k-1} & c_{1k} & c_{1,k+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{2k} & c_{2,k+1} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{3,k+1} & \cdots & b_{3n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{4,k+1} & \cdots & b_{4n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{m,k+1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Na fase seguinte procede-se como anteriormente, procura-se uma coluna depois da coluna k que não tenha todos os elementos nulos abaixo do segundo. Encontrada essa coluna, o seu terceiro elemento tem de ser diferente de zero, mesmo que para isso se tenha de efetuar trocas de linhas, esse número será então o pivot da terceira linha. Então faz-se o anulamento de todos os elementos da coluna em questão abaixo do pivot da terceira linha, fazendo operações elementares do tipo III. E assim sucessivamente, repetindo-se este processo até obter uma matriz em escada de linhas, como as matrizes apresentadas em Eq. 10.

Após este processo, que constitui o Método da Condensação, para saber a característica da matriz basta contar os pivots da matriz final.

Este processo de eliminação dos zeros da matriz, foi organizado por colunas, ou seja, foram-se anulando as entradas abaixo da diagonal coluna após coluna. No entanto tal também poderia ser feito organizando o processo por linhas, isto é, anulando as entradas à esquerda da diagonal linha após linha. Se o fizéssemos veríamos que chegávamos ao mesmo número de pivots. Por outro lado, pode-se observar que no máximo apenas existe um pivot por linha e por coluna. E ainda que o número de linhas com pivot é igual ao número de colunas com pivot. Este facto assegura que para qualquer matriz, o número de linhas linearmente independentes é igual ao número de colunas linearmente independentes. Por conseguinte para uma matriz quadrada, se o conjunto das suas linhas forem linearmente independentes as suas colunas também o são, caso contrário nem serão as linhas nem as colunas.

De maneira a compreender este processo de forma mais segura observe-se os seguintes exemplos.

◆ **Exemplo 22.**

Determinar a característica da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Uma vez que se trata de uma matriz quadrada de segunda ordem, o número de linhas é $m = 2$ e o número de colunas é $n = 2$, sendo o menor destes igual a dois, a característica da matriz r tem de ser menor ou igual a dois ($r \leq 2$).

Aplicando o método da condensação à matriz, vamos neste caso multiplicar a primeira linha por (-3) , ou seja $(-3) \times [3 \ 1] = [-9 \ -3]$ e adicionar o resultado à segunda linha, $[-9 \ -3] + [9 \ 1] = [0 \ -2]$, o número (-3) foi precisamente o escolhido para anular o elemento da matriz abaixo da entrada a_{11} , obtendo-se a matriz,

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \leftarrow L_2 - 3L_1$$

que já é uma matriz em escada de linhas conforme as matrizes esquematizadas na Eq. 10. Quanto à característica da matriz A , esta é igual ao número de pivots (assinalados a negrito) da matriz obtida no fim do método da condensação ($r = 2$). Logo pode-se concluir que as linhas da matriz são linearmente independentes porque a característica da matriz é igual ao número de linhas ($m = r = 2$).

∞ . . . ∞

◇ Exemplo 23.

Determinar a característica da matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & 5 \\ 10 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

Uma vez que se trata de uma matriz quadrada de ordem 3, a característica da matriz r será menor ou igual a três ($r \leq 3$).

Aplicando o método da condensação à matriz, vamos neste caso multiplicar a primeira linha por 2, ou seja $2 \times [2 \ 1 \ -3] = [4 \ 2 \ -6]$ e adicionar este resultado à segunda linha, $[4 \ 2 \ -6] + [-4 \ -2 \ 5] = [0 \ 0 \ -1]$, substituindo-a na matriz obtém-se,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 10 & 6 & -10 \end{bmatrix} \leftarrow L_2 + 2L_1$$

observando a primeira coluna da matriz obtida, continua a haver elementos não nulos abaixo do primeiro elemento da primeira coluna, portanto vamos multiplicar por (-5) a primeira linha, $(-5) \times [2 \ 1 \ -3] = [-10 \ -5 \ 15]$ e adicionar o resultado à terceira linha, $[10 \ 6 \ -10] + [-10 \ -5 \ 15] = [0 \ 1 \ 5]$, substituindo na matriz, virá

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 - 5L_1$$

uma vez anulados todos os elementos abaixo do pivot da primeira linha (**2**), vamos-nos concentrar na segunda coluna, mais precisamente no seu segundo elemento, observando-o na matriz vemos que este é zero e como há elementos não nulos abaixo dele temos de trocar as linhas, neste caso vamos trocar a segunda com a terceira linha, ficando a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_2 \end{matrix}$$

que já é uma matriz em escada de linhas conforme as matrizes esquematizadas na Eq. 10. Quanto à característica da matriz B , esta é igual ao número de pivots (assinalados a negrito) da matriz obtida no fim do método da condensação ($r = 3$). Portanto pode-se concluir que as linhas da matriz são linearmente independentes porque a característica da matriz é igual ao seu número de linhas ($m = r = 3$).

∞ . . . ∞

◇ Exemplo 24.

Determinar a característica da matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

Sendo esta uma matriz quadrada de terceira ordem, a característica da matriz não poderá ser superior a três ($r \leq 3$).

Para condensar esta matriz, vamos começar por fazer uma troca de linhas entre a primeira e segunda linha, isto porque na primeira entrada da primeira linha se encontra um elemento nulo, portanto não pode ser pivot.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

Tendo agora o pivot da primeira linha o valor válido (**2**), vamos recorrer a este pivot para anular toda a coluna abaixo dele, multiplicando a primeira linha por (-1) e adicionando o resultado à terceira linha obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 - L_1$$

Multiplicando agora a segunda linha por (-2) e adicionando o resultado à linha 3, obtemos

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 - 2L_2$$

E assim se obteve uma matriz em escada de linhas, em que apenas duas das suas linhas têm pivot, portanto, conclui-se que a característica desta matriz é 2 ($r = 2$). Sendo esta uma matriz quadrada de ordem 3 as suas linhas (e colunas) são linearmente dependentes, porque a característica é inferior à ordem da matriz.

∞ . . . ∞

◇ **Exemplo 25.**

Determinar a característica da matriz:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se trata de uma matriz quadrada de ordem 3, a característica será menor ou igual a três ($r \leq 3$).

Para anular todos os elementos abaixo do elemento d_{11} vamos multiplicar a primeira linha por $(-\frac{2}{3})$ e adicionar o resultado à segunda, e vamos multiplicar a primeira linha por $(-\frac{5}{3})$ e adicionar o resultado à terceira linha, assim obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_1 \end{array}$$

Uma vez anulados todos os elementos da primeira coluna abaixo da sua primeira entrada, vamos anular o último elemento da segunda coluna, para tal subtraímos a segunda linha à terceira.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -\frac{17}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow L_3 - L_2$$

Obteve-se apenas duas linhas com pivot, portanto, logo a característica da matriz D é 2 ($r = 2$). Sendo esta uma matriz quadrada de ordem 3 as suas linhas (e colunas) são linearmente dependentes, porque a característica é inferior à ordem da matriz.

∞ . . . ∞

◇ **Exemplo 26.**

Determinar quantas linhas e colunas linearmente independentes tem a matriz:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Esta é uma matriz retangular de dimensão (4×5) logo a sua característica será no máximo igual a quatro ($r \leq 4$). Para iniciar o método da condensação precisamos de um elemento diferente de zero na entrada e_{11} , logo teremos

de efetuar uma troca de linhas. Trocando a primeira linha com a segunda obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \end{array}$$

Multiplicando a primeira linha pelo fator (-2) e somando o resultado obtido à quarta linha

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow L_4 - 2L_1$$

Passa-se agora para a segunda coluna, que por não ter um elemento não nulo na sua segunda entrada obrigamos a fazer uma permutação de linhas, sendo assim, permutando a linha 2 com a linha 3,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_2 \end{array}$$

multiplicando a segunda linha por 2 e adicionando este produto à quarta linha, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftarrow L_4 + 2L_2$$

prossequindo agora para a coluna 3, que já tem um elemento não nulo na sua terceira posição. Multiplica-se a terceira linha por 2 e soma-se o resultado à quarta linha,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow L_4 + 2L_3$$

Obteve-se assim uma matriz em escada de linhas com três pivots, ou seja com característica três ($r = 3$). portanto, a matriz E tem três linhas e três colunas linearmente independentes. Logo o conjunto das suas quatro linhas é linearmente dependente pois a característica é inferior ao número de linhas. Quanto às colunas, no seu conjunto também são linearmente dependentes, pois a característica também é inferior ao número de colunas da matriz.

∞ . . . ∞

◇ **Exemplo 27.**

Determinar a característica da matriz M e diga quantas li-

nhas e colunas linearmente independentes tem esta matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta é uma matriz retangular de dimensão (5×6) logo a sua característica será no máximo igual ao menos destes números que é 5, $(r \leq 5)$. Para iniciar o método de Gauss é necessário ter um elemento diferente de zero na entrada m_{11} , logo teremos de efetuar uma troca de linhas. Vamos trocar a primeira linha com a linha número quatro, a matriz resultante desta troca de linhas é

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow L_4 \\ \\ \\ \leftarrow L_1 \end{array}$$

Seguidamente tem-se que anular todas as componentes da matriz abaixo da componente m_{11} : Para tal multiplicamos a primeira linha pelo fator 2 e somamos este resultado à segunda linha; soma-se a primeira linha à terceira e soma-se à quarta linha o dobro da primeira. Feitas estas operações fica-se com a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 + L_1 \\ \leftarrow L_4 + 2L_1 \end{array}$$

Agora vamos anular todas as componentes da segunda coluna abaixo do elemento m_{22} : subtrai-se a segunda linha à terceira; subtrai-se à quarta linha o produto da segunda por $\frac{1}{2}$ e subtrai-se à quinta linha o produto da segunda por $\frac{3}{2}$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_2 \\ \leftarrow L_5 - \frac{3}{2}L_2 \end{array}$$

Nesta fase devemos passar para a coluna 3, acontece que esta coluna já tem todos os elementos nulos abaixo da sua segunda entrada, por isso passa-se para a próxima coluna, a quarta, esta também já tem todos os elementos nulos abaixo da segunda entrada, a coluna seguinte que é a quinta também está nas mesmas circunstâncias, logo só nos resta trabalhar na última coluna, a sexta, esta tem um pivot válido na sua terceira entrada, o número (-6) . Usamos este pivot para anular todos os elementos desta coluna abaixo dele: somamos à quarta linha o produto da terceira por $(-\frac{1}{2})$ e somamos à quinta linha o produto da

terceira por $(-\frac{1}{2})$. Por fim obtém-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_4 - \frac{1}{2}L_3 \\ \leftarrow L_5 - \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

Esta matriz já está em escada de linhas e tem três pivots, ou seja, tem característica três $(r = 3)$. Como tal, a matriz M tem três linhas e três colunas linearmente independentes. Logo o conjunto das suas cinco linhas é linearmente dependente pois a característica é inferior ao número de linhas. Quanto às colunas, no seu conjunto também são linearmente dependentes, pois a matriz tem seis colunas e a característica da matriz é 3, portanto inferior ao número de colunas da matriz.

∞ . . . ∞

✎ **Exercício 17.**

Determine a característica das seguintes matrizes, e indique se as linhas e as colunas das matrizes são linearmente dependentes ou independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 5 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -6 & 3 \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 6 & -2 & -1 \\ 7 & 1 & 4 \end{bmatrix};$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix};$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}; J = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5 Sistemas de Equações Lineares

Muitos problemas nas mais variadas áreas da ciência são resolvidos recorrendo a sistemas de equações lineares. Veremos nesta secção como a álgebra matricial pode simplificar em grande medida o estudo destes sistemas. O auxílio da utilização de matrizes no cálculo da solução de sistemas de equações lineares é tanto maior quanto maior for o número de incógnitas e o número de equações.

ordem à incógnita y .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+2}{2} \\ \frac{3y+6}{2} + \frac{4y}{2} = -\frac{2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+2}{2} \\ 3y+6+4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{y+2}{2} \\ 7y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\frac{8}{7}+2}{2} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases}$$

Aqui já se tem a solução para a incógnita y , então usa-se este valor para determinar a incógnita x na primeira equação.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\frac{8}{7} + \frac{14}{7}}{2} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\frac{6}{7}}{2} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{6}{14} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{7} \\ y = -\frac{8}{7} \end{cases}$$

Por fim obtém-se a solução completa do sistema.

Solução: $S = \left\{ \left(\frac{3}{7}, -\frac{8}{7} \right) \right\}$

∞ . . . ∞

◆ **Exemplo 29.**

Resolução de um sistema de equações lineares de três equações com três incógnitas pelo método das substituições:

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} - 1 = z + 2 \\ 2z - x = -1 - 2x \\ \frac{y}{2} + 2 = -\frac{-2z+1+x}{4} \end{cases}$$

Como este sistema não está na forma canónica, a primeira tarefa a fazer é coloca-lo nessa forma, como mostra a Eq. 14.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2z}{2} + \frac{4}{2} \\ 2x - x + 2z = -1 \\ \frac{2y}{4} + \frac{8}{4} = -\frac{-2z+1+x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ x + 2z = -1 \\ x + 2y - 2z = -9 \end{cases}$$

Uma vez colocado o sistema na forma canónica, escolhe-se uma equação e resolve-se essa equação em ordem a uma das incógnita. Neste caso resolveu-se a segunda equação em ordem à incógnita x , pois além desta equação ser a mais simples a incógnita x tem coeficiente unitário.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 6 \\ x = -2z - 1 \\ x + 2y - 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Substituindo essa expressão para a incógnita x nas outras equações e realizando as simplificações necessárias obtemos

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2z - 1 + y - 2z = 6 \\ x = -2z - 1 \\ -2z - 1 + 2y - 2z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4z = 7 \\ x = -2z - 1 \\ 2y - 4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Aqui podemos resolver por exemplo a primeira equação em ordem à incógnita y e substituir a expressão obtida na terceira equação,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z + 7 \\ x = -2z - 1 \\ 2(4z + 7) - 4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Neste ponto a terceira equação já tem apenas uma incógnita, resolvendo esta equação obtemos a solução para a incógnita z ,

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z + 7 \\ x = -2z - 1 \\ 8z + 14 - 4z = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z + 7 \\ x = -2z - 1 \\ 4z = -22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4z + 7 \\ x = -2z - 1 \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Agora substituímos o valor de z nas equações que ficaram de reserva, e efetuamos as simplificações necessárias para determinar as soluções das outras incógnitas.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4\left(-\frac{11}{2}\right) + 7 \\ x = -2\left(-\frac{11}{2}\right) - 1 \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{44}{2} + \frac{14}{2} \\ x = 11 - 1 \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{30}{2} \\ x = 10 \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = -15 \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases}$$

Solução: $S = \left\{ \left(10, -15, -\frac{11}{2} \right) \right\}$

∞ . . . ∞

5.1 Sistemas de Equações na Forma Matricial

Quando se tem um sistema de equações na forma canónica, pode-se recorrer à multiplicação de matrizes definida na secção (3.3), para escrever o sistema da Eq. 14 na forma matricial, ficando assim o sistema de equações

lineares com o seguinte aspeto:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

O uso de matrizes permite representar o sistema de forma extremamente compacta, pois independentemente da dimensão que ele tenha pode agora apresentar-se o sistema da seguinte maneira:

$$[A][X] = [B]$$

ou simplesmente

$$AX = B \quad (16)$$

Onde A é a matriz simples do sistema ou **matriz dos coeficientes**. X é a **matriz coluna das incógnitas** e B é a **matriz coluna dos termos independentes**.

$$A = [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$X = [X] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = [B] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Para se fazer o estudo dos sistemas usa-se sobretudo uma matriz que contém simultaneamente os coeficientes do sistema e os termos independentes separados por uma linha vertical. Esta matriz designa-se por **matriz ampliada** do sistema, **matriz completa** ou ainda **matriz aumentada**. Na resolução de sistemas de equações pelo método da condensação, que veremos mais adiante, é essencialmente sobre esta matriz que se atua:

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \quad (17)$$

Quando um sistema se encontra na forma matricial pode-se resolver o sistema recorrendo ao método da condensação ou método de Gauss, que foi descrito na secção (4.2). Este método permite obter uma matriz completa do sistema equivalente à original mas na forma de escada de linhas, como a representada na Eq. 10. Quando a matriz completa do sistema estiver em escada de linhas, volta-se a representar o sistema na forma de equações como representada na Eq. 14, e resolve-se este sistema facilmente por substituição retroativa, que consiste em determinar o valor da última incógnita, com este determina-se o valor da penúltima e assim

sucessivamente até se determinar o valor de todas as incógnitas.

O método da condensação aplicado à resolução de sistemas de equações também recorre ao conceito de operações elementares enunciadas na secção 4.2, no entanto para resolver sistemas não se usam todas as operações elementares expostas nessa secção, pois algumas delas não podem ser aplicadas a matrizes completas que representam sistemas de equações. Assim, deixa-se aqui um resumo das **operações elementares válidas para sistemas de equações**:

- (I) Podem-se trocar linhas da matriz $[A | B]$.
- (II) Podem-se trocar colunas da matriz $[A | B]$ com exceção da última, no entanto esta troca corresponde a uma alteração na ordem das incógnitas, por isso deve ser anotada a respetiva troca de ordem das incógnitas na matriz coluna $[X]$.
- (III) Pode-se multiplicar qualquer linha da matriz $[A | B]$ por qualquer constante diferente de zero.
- (IV) Pode-se substituir uma linha pela que se obtêm somando-a com outra linha multiplicada por uma constante qualquer.

◇ **Exemplo 30.**

Este exemplo mostra a resolução de um sistema de equações lineares de três equações e três incógnitas pelo método da condensação de Gauss:

$$\begin{cases} -2x + y + z = -5 \\ 4x - y + 2z = -8 \\ -6x + 2y - 2z = 8 \end{cases}$$

Como este sistema já está na forma canónica, podemos escreve-lo na forma matricial (Eq. 15).

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \text{ é a matriz dos coeficientes;}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ é a matriz coluna das incógnitas;}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ é a matriz coluna dos termos independentes.}$$

A matriz completa do sistema será

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & -8 \\ -6 & 2 & -2 & 8 \end{array} \right]$$

A partir desta matriz prossegue-se com o método da condensação, aplicando as operações elementares necessárias para que a matriz fique em escada de linhas. Para anular os elementos abaixo da entrada a_{11} começa-se por multiplicar a primeira linha por 2 e somar o resultado à segunda, e multiplicar a primeira linha por (-3) e somar o resultado à terceira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -18 \\ 0 & -1 & -5 & 23 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

Agora apenas nos falta anular a entrada a_{32} da matriz, para tal soma-se a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 & -18 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + L_2$$

Esta matriz já está em escada de linhas, assim passa-se o sistema para a forma de equações separadas e resolve-se por substituição ascendente.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -5 \\ y + 4z = -18 \\ -z = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = -5 \\ y + 4(-5) = -18 \\ z = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2 + (-5) = -5 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

A solução do sistema é: $S = \{(1, 2, -5)\}$, se pretendermos apresentar a solução na forma matricial escrevemos:

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

◆ **Exemplo 31.**

Resolução de um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas pelo método da condensação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -8x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Como este sistema já está na forma canónica, então podemos escreve-lo na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriz completa do sistema:

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ -8 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

Eliminando a entrada a_{21} da matriz

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \end{array} \right] \leftarrow L_2 + 4L_1$$

A matriz completa do sistema já está na forma de escada de linhas, portanto resta resolve-lo por substituições ascendentes.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 1 \\ -5x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2(-\frac{4}{5}) = 1 \\ x_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{10} \\ x_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

A solução do sistema é: $S = \left\{ \left(-\frac{3}{10}, -\frac{4}{5} \right) \right\}$

◆ **Exemplo 32.**

Resolução de um sistema de equações lineares de três equações e três incógnitas pelo método de Gauss. Seja o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{2x+8}{2} = z - y + 2 \\ 2(z - x) = y - 10 \\ -4x = 2z + 6 \end{cases}$$

Como se pode observar este sistema não está na forma canónica, como tal essa é a primeira tarefa a realizar.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(x+4)}{2} + y - z = 2 \\ 2z - 2x - y = -10 \\ -4x - 2z = 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ -2x - y + 2z = -10 \\ -4x - 2z = 6 \end{cases}$$

Uma vez o sistema assim escrito pode passar-se à forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Escreve-se a matriz completa do sistema.

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & -10 \\ -4 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right]$$

A partir desta matriz procede-se com o método da condensação aplicando as operações elementares necessárias para que a matriz fique em escada de linhas.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 4 & -6 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array}$$

Uma vez anulados os elementos da primeira coluna abaixo do pivot, faz-se o mesmo à segunda coluna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & -6 & 54 \end{array} \right] \leftarrow L_3 - 4L_2$$

Depois da matriz condensada em escada de linhas resolve-se o sistema por substituição ascendente.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y = -14 \\ -6z = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + (-14) + (-9) = -5 \\ y = -14 \\ z = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -14 \\ z = -9 \end{cases}$$

A solução do sistema é: $S = \{(3, -14, -9)\}$

∞ . . . ∞

5.2 Método da Condensação Completa

Uma matriz quadrada para a qual no método de eliminação de Gauss, com possíveis reordenações de linhas, se obtém uma matriz cuja diagonal principal tem todos os pivots diferentes de zero, designa-se de **matriz não-singular**, por conseguinte uma matriz não-singular é uma matriz quadrada cuja característica é igual à ordem. Por outro lado uma **matriz singular** é uma matriz quadrada com característica inferior à ordem, o que equivale a dizer que não é possível por eliminação de Gauss ter todos os pivots da diagonal principal diferentes de zero.

Como se disse, uma matriz não-singular pode ser transformada numa matriz triangular superior por eliminação de Gauss, com possíveis reordenações de linhas se necessário, matriz essa que tem elementos não nulos na diagonal principal designados por pivots. Este processo pode ser continuado a partir deste estado até se obter uma matriz diagonal, cujos elementos na diagonal principal são os pivots. Tal tarefa consiste em adicionar a cada linha múltiplos de linhas mais baixas de forma a anular todos os elementos acima da diagonal principal. Começando pela última coluna vai-se avançando pelas colunas por ordem inversa, da última para a primeira, num processo semelhante ao método de Gauss. Quando a matriz já estiver na forma diagonalizada, divide-se cada linha pelo respetivo pivot de forma a que todos os elementos da diagonal principal fiquem iguais a 1. Este método de eliminação completa chama-se **método de eliminação de Gauss-Jordan**.

Se a matriz não for quadrada ou for uma matriz singular pode-se usar este método fazendo algumas alterações. Na primeira fase do método, em vez de se obter uma matriz triangular superior obtém-se uma matriz em escada de linhas. Depois reordenam-se as colunas de forma a obter uma submatriz triangular superior o mais à esquerda possível dentro da matriz principal. Na segunda fase do método apenas é necessário anular os elementos acima da diagonal principal da submatriz triangular superior. Deve ter-se em atenção que no caso das matrizes completas de sistemas de equações a última coluna nunca pode ser movida, ficará sempre na última posição. E mesmo para as outras colunas, quando as trocamos devemos trocar também a ordem das incógnitas correspondentes. Para melhor compreensão do método exposto aconselha-se o estudo dos exemplos seguintes.

◇ **Exemplo 33.**

Resolução de um sistema de equações lineares de três equações e três incógnitas pelo método da condensação de Gauss-Jordan. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = -7 \\ x + y + 2z = 1 \\ -2x - y - 2z = 4 \end{cases}$$

Como este sistema já está na forma canónica, podemos escreve-lo na forma matricial (Eq. 15).

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

A matriz completa do sistema será

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

Aplica-se o método da condensação fazendo as operações elementares necessárias para que a matriz fique triangular superior. Como a segunda linha começa com o número 1 vamos trocar a primeira com a segunda linha. Esta operação não é obrigatória, foi realizada apenas com o intuito de simplificar os cálculos, pois assim ficaremos com o pivot da primeira linha igual à unidade.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & -7 \\ -2 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 \\ \leftarrow L_1 \end{array}$$

Para anular os elementos abaixo da entrada a_{11} começa-se por multiplicar a primeira linha por (-3) e somar o resultado à segunda, depois multiplica-se a primeira linha por 2 e soma-se o resultado à terceira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

O pivot da segunda linha é (-1) . Vamos anular o elemento abaixo dele, assim somamos a segunda linha à terceira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + L_2$$

A matriz que se obteve já é uma matriz triangular superior, constituindo a primeira fase do método. Para prosseguir vamos anular também os elementos da matriz acima da diagonal principal, tarefa essa que constitui a segunda parte do método da condensação de Gauss-Jordan. Para anular os elementos da última coluna da matriz A acima do pivot da terceira linha vamos multiplicar a terceira linha por (-2) e adicionar o resultado à segunda, e somar a terceira linha à primeira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 - 2L_3 \end{array}$$

Passando agora à segunda coluna, vamos adicionar a segunda linha à primeira.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right] \leftarrow L_1 + L_2$$

Assim, na posição da matriz A já se tem uma matriz diagonal. Agora devemos dividir cada linha da matriz completa do sistema pelo respectivo pivot, ficando na posição da matriz A uma matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} -L_2 \\ -\frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

A solução do sistema é o vetor coluna que se obtém na posição em que inicialmente colocamos o vetor coluna dos termos independentes B . Portanto a solução do sistema será: $S = \{(-5, 2, 2)\}$, ou na forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

◆ **Exemplo 34.**

Resolução de um sistema de equações lineares de duas equações e duas incógnitas pelo método da condensação de Gauss-Jordan. Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - y = -5 \\ -4x + y = 3 \end{cases}$$

O sistema na forma matricial ficará

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A matriz completa do sistema será

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ -4 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

Aplica-se o método da condensação fazendo as operações elementares necessárias para que a matriz fique triangular superior: Multiplica-se a primeira linha por 2 e adiciona-se o resultado à segunda.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -7 \end{array} \right] \leftarrow L_2 + 2L_1$$

A matriz já é triangular superior. Fazendo-a também (à parte do vetor coluna B) triangular inferior. Multiplica-se a segunda linha por (-1) e soma-se o resultado à primeira.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -7 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

Uma vez diagonalizada a matriz, divide-se a primeira linha por 2, e a segunda linha por (-1) .

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right] \leftarrow \begin{array}{l} \frac{1}{2}L_1 \\ -L_2 \end{array}$$

A solução do sistema será: $S = \{(1, 7)\}$.

∞ . . . ∞

◆ **Exemplo 35.**

Pretende-se determinar a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x_2 + 1 = 6 - x_1 - x_3 \\ \frac{3x_2 + 5x_3}{2} = 4 - x_1 \\ x_1 = \frac{2 - 5x_3}{4} \end{cases}$$

Este sistema não está ainda na forma canónica, por isso teremos de efetuar as operações necessárias para que tal aconteça.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 - 1 \\ \frac{3x_2 + 5x_3}{2} = \frac{8 - 2x_1}{2} \\ \frac{4x_1}{4} = \frac{2 - 5x_3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_2 + 5x_3 = 8 - 2x_1 \\ 4x_1 = 2 - 5x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \\ 4x_1 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

O sistema já está na forma canónica, assim podemos escreve-lo na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A matriz completa do sistema será

$$[A | B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 5 & 2 \end{array} \right]$$

Iniciando o método da condensação ficamos com

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & -18 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

Uma vez anulados os elementos da primeira coluna fora da diagonal, vamos anular o terceiro elemento da segunda coluna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + 4L_2$$

Para simplificar os cálculos podemos dividir a terceira linha por 13, assim teremos um pivot unitário para trabalhar.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \leftarrow \frac{1}{13}L_3$$

Anulando os elementos da terceira coluna fora da diagonal.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

Anula-se também o primeiro elemento da segunda coluna.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

Como temos já uma matriz identidade no lugar da matriz A dos coeficientes do sistema o processo está finalizado. A solução do sistema é:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ -2 \end{array} \right] \\ \approx \quad \cdot \cdot \cdot \quad \approx \end{array}$$

Exemplo 36.

Pretende-se determinar a solução do sistema de quatro equações com quatro incógnitas (4×4):

$$\begin{cases} x + y + z - w = -5 \\ -2x + y + 3z + w = -2 \\ 3x - y - z - 2w = -6 \\ -x + 2z + 2w = 5 \end{cases}$$

Na forma matricial ficará

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A matriz completa do sistema será

$$[A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Anula-se os elementos abaixo da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -12 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}$$

Troca-se a segunda com a quarta linha.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 5 & -1 & -12 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_2 \end{array}$$

Continua-se a anular os elementos abaixo da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -12 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_3 + 4L_2 \\ \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}$$

Divide-se a quarta linha por (-4) .

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right] \leftarrow -\frac{1}{4}L_4$$

Permuta-se a terceira com a quarta linha.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_4 \\ \leftarrow L_3 \end{array}$$

Continua-se a anular os elementos abaixo da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -15 \end{array} \right] \leftarrow L_4 - 8L_3$$

Divide-se a quarta linha por (-3) .

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \leftarrow -\frac{1}{3}L_4$$

Uma vez anulados os elementos abaixo da diagonal principal, anulam-se também os elementos acima começando pela penúltima coluna.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + L_4 \\ \leftarrow L_2 - L_4 \\ \leftarrow L_3 - L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

A solução do sistema é: $S = \{(1, 1, -2, 5)\}$

∞ . . . ∞

Exercício 18.

Determine a solução dos seguintes sistemas aplicando o método da condensação:

(a) $\begin{cases} 2x + y = -9 \\ -4x - 8y = 12 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ -6x + 5y = 6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 9x - y = -4 \\ -16x + 2y = 10 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} -2x + 2y = 8 \\ 4x + y = -1 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 5x + y = 0 \\ -10x - 3y = 1 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -4x + 3y = -5 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ -2x + 4y = 3 \end{cases}$

(i) $\begin{cases} \frac{x}{2} + y = -1 \\ x - \frac{y}{2} = -2 \end{cases}$

(j) $\begin{cases} \frac{x}{3} + y = \frac{1}{2} \\ x + 2y = 5 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} \frac{6}{5}x + \frac{3}{5}y = 1 \\ \frac{1}{5}x - \frac{7}{5}y = -2 \end{cases}$

Exercício 19.

Determine a solução dos seguintes sistemas aplicando o método da condensação:

(a) $\begin{cases} 3x + y - 2z = -3 \\ x + 5y + 4z = -1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 5x + y + z = 2 \\ 6x + 4y - 2z = 14 \\ -7x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 4 \\ 6x + 3y + z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x - 2y + z = 2 \\ -2x - 3y + 3z = 4 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -2x + y - 4z = 0 \\ 4x + 10y - 3z = -9 \end{cases}$

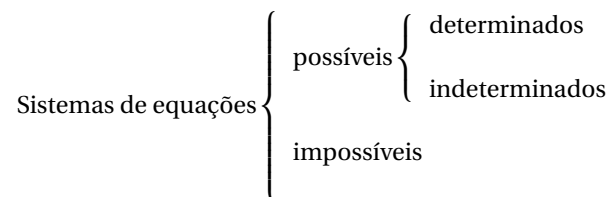
(f) $\begin{cases} x + 2y - 4z = -7 \\ -2x + 5z = 3 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} -x + y + 2z = \frac{7}{2} \\ y + 2z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$

5.3 Sistemas Impossíveis e Sistemas Possíveis Indeterminados

Até ao momento foram considerados apenas sistemas de equações com o mesmo número de equações e de incógnitas, em todos eles se obteve uma única solução para o sistema, mas como veremos nesta secção, existem casos em que não há qualquer solução e outros em que existe uma infinidade delas. Por outro lado, as matrizes dos coeficientes destes sistemas de equações eram quadradas. No entanto interessa também considerar sistemas em que o número de equações é diferente do número de incógnitas, sistemas esses cujas matrizes dos coeficientes são retangulares.

Quando um sistema de equações tem pelo menos uma solução diz-se que esse sistema é possível ou compatível, caso contrário se não tiver qualquer solução será impossível ou incompatível. Os sistemas que são possíveis dividem-se em determinados e indeterminados conforme têm uma única solução ou uma infinidade de soluções, respetivamente.



Aplicando os conhecimentos adquiridos sobre matrizes e o método da condensação, sabe-se que um sistema é

possível (determinado ou indeterminado) se a característica da matriz dos coeficientes ($r_{[A]}$) e a característica da matriz completa ($r_{[A|B]}$) forem iguais, isto é $r_{[A]} = r_{[A|B]}$. Caso contrário, se a característica da matriz dos coeficientes e a característica da matriz completa do sistema forem diferentes, o sistema é impossível, sendo o caso de $r_{[A]} \neq r_{[A|B]}$.

Resumindo, num sistema de equações lineares geral, em que m é o número de equações, n é o número de incógnitas, $r_{[A]}$ é a característica da matriz dos coeficientes e $r_{[A|B]}$ é a característica da matriz completa do sistema, podem ocorrer três situações no que diz respeito à solução do sistema:

- (I) **Sistema possível determinado.** São os sistemas que têm uma única solução. Estes sistemas ocorrem se $r_{[A]} = r_{[A|B]} = n$ e resolvem-se utilizando, por exemplo, o Método da Condensação Completa, exposto na secção 5.2 da página 22.
- (II) **Sistema possível indeterminado.** São sistemas que têm infinitas soluções. Estes sistemas ocorrem se $r_{[A]} = r_{[A|B]} < n$. O método para resolver este tipo de sistemas será exposto seguidamente com alguma detalhe e apresenta-se um caso resolvido no Exemplo 38.
- (III) **Sistema impossível.** São sistemas que não têm nenhuma solução, o que acontece se $r_{[A]} \neq r_{[A|B]}$. É o caso do sistema do Exemplo 37.

Para resolver um sistemas possível indeterminado (sistema do tipo II) na forma matricial, primeiro condensase a matriz completa do sistema em escada de linhas, o que nesta fase já deve ter sido feito para determinar $r_{[A]}$. Depois reordenam-se as colunas da matriz (à parte da coluna da direita), de forma a aparecer uma submatriz triangular superior com a maior ordem possível chegada ao lado esquerdo da matriz, efetuando-se as respetivas permutações na ordem das incógnitas do sistema.

A submatriz triangular superior obtida terá ordem $k = r_{[A]}$, portanto a matriz completa do sistema terá k pivots nas suas k primeiras colunas. Assim conclui-se que o sistema tem k **incógnitas principais** que correspondem às colunas que contêm pivots e $n - k$ **incógnitas não principais** (também designadas por **incógnitas livres**) que correspondem às colunas que não contêm pivots. O número de incógnitas livres ($n - k$) também se designa por **grau de indeterminação do sistema**.

Seguidamente anulam-se todas as entradas acima da diagonal da submatriz triangular superior à esquerda da matriz completa do sistema, efetuando operações elementares como na Método da Condensação Completa da secção 5.2 da página 22. Feito isto, obtém-se uma submatriz diagonal de ordem k do lado esquerdo da matriz completa. Neste ponto dividem-se as linhas da matriz pelos pivots de cada linha de forma a aparecer uma matriz

identidade de ordem k . Por fim passam-se as $n - k$ colunas que não contêm pivot para o lado direito do sistema mudando o sinal dos respetivos elementos, isto é, estas colunas movem-se para o lado direito da linha vertical no meio da matriz completa.

Assim obtém-se uma matriz identidade do lado esquerdo da matriz completa. As colunas que estão no lado direito da linha vertical correspondem à solução do sistema, destas, as $n - k$ primeiras colunas correspondem às respetivas incógnitas livres, em relação às quais as incógnitas principais se exprimem, e a coluna mais à direita corresponde aos termos independentes da solução. No Exemplo 38 usaremos este processo para determinar a solução do sistema.

✧ **Exemplo 37.**

Sistema impossível.

Determine o conjunto solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ 6x + 3y - 9z = 6 \\ 7x + 14y - 21z = 13 \end{cases}$$

A representação matricial deste sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \\ 7 & 14 & -21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

e a sua matriz aumentada será

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array} \right]$$

Condensando esta matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 6 & 3 & -9 & 6 \\ 7 & 14 & -21 & 13 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -9 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ \leftarrow L_3 - 7L_1 \end{array}$$

A característica da matriz aumentada é três e a característica da matriz dos coeficientes (só a parte à esquerda do traço vertical) é dois, portanto diferentes, isto implica que o sistema não tenha solução ou seja é impossível ($r_{[A]} = 2 \neq r_{[A|B]} = 3$). Logo o conjunto solução será uma conjunto vazio: $S = \emptyset$

∞ . . . ∞

✧ **Exemplo 38.**

Sistema possível indeterminado.

Pretende-se calcular a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + 8w + 11t = 17 \\ 2x + 4y + 6z + 26w + 26t = 38 \\ x + y - 2w + 3t = 7 \end{cases}$$

O sistema está na forma canónica, então podemos escrevê-lo na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 8 & 11 \\ 2 & 4 & 6 & 26 & 26 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 38 \\ 7 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada do sistema será

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 & 11 & 17 \\ 2 & 4 & 6 & 26 & 26 & 38 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right]$$

por condensação transforma-se esta matriz numa matriz em escada de linhas

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 & 11 & 17 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 4 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -10 & -8 & -10 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 & 11 & 17 \\ 0 & -1 & -2 & -10 & -8 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 4 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_3 \\ \leftarrow L_2 \end{array}$$

A matriz já está em escada de linhas. Neste ponto temos três pivots que correspondem às incógnitas principais x, y e z nas três primeiras colunas, e temos duas colunas sem pivot que correspondem às incógnitas livres w e t . Logo este sistema será possível duplamente indeterminado, isto é, tem dois graus de indeterminação. Para determinar a solução vamos passar essas colunas para o segundo membro mudando o sinas das entradas.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 2 & -8 & -11 & 17 \\ 0 & -1 & -2 & 10 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -4 & 4 \end{array} \right]$$

Uma vez que já temos uma submatriz triangular superior na parte esquerda da matriz aumentada, vamos transforma-la numa matriz diagonal, anulando os elementos acima da diagonal desta submatriz.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & 2 & -7 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -4 & 4 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 - L_3 \\ \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -10 & -4 & 4 \end{array} \right] \leftarrow L_1 + 2L_2$$

Divide-se esta matriz pelos elementos da diagonal de forma a que apareça uma matriz identidade na submatriz esquerda da matriz completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & -2 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -L_2 \\ \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

A solução do sistema será:

$$\begin{cases} x = 2w + t + 1 \\ y = -4t + 6 \\ z = -5w - 2t - 2 \end{cases} \quad \forall w, t \in \mathbb{R}$$

ou de outra forma:

$$(x, y, z) = (2w + t + 1, -4t + 6, -5w - 2t - 2) \quad \forall w, t \in \mathbb{R}$$

ou ainda na forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ -5 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall w, t \in \mathbb{R}$$

Estas são algumas das formas de representar as infinitas soluções que o sistema tem. Se pretendermos uma solução em particular podemos atribuir valores arbitrários às incógnitas livres w e t , por exemplo se $w = 1$ e $t = 2$, teremos a solução particular $(x, y, z, w, t) = (5, -2, -11, 1, 2)$

∞ . . . ∞

◇ **Exemplo 39.**

Determinar a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y + z + 2w = 1 \\ -x + y - w = 0 \\ -2x + 2y - z - 4w = 0 \\ z + w = 1 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz aumentada do sistema será

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Condensando a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + L_1 \\ \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_3 - L_2 \\ \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

A matriz já está em escada de linhas, mas a última linha é nula. Iremos descartar esta linha.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

De forma a aparecer uma submatriz triangular superior à esquerda vamos reordenar as colunas, tendo em consideração a nova ordem das incógnitas.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad \begin{bmatrix} x \\ z \\ w \\ y \end{bmatrix}$$

Finalmente temos uma submatriz triangular superior com característica igual a três. Então teremos três incógnitas principais x, z e w , e uma incógnita livre y , logo o sistema será possível indeterminado apenas com um grau de indeterminação. Então vamos passar a coluna da incógnita livre para o segundo membro do sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Condensando a parte superior da submatriz à esquerda

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ & \leftarrow L_2 + L_3 \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] & \leftarrow L_1 - L_2 \end{aligned}$$

Multiplicamos a terceira linha por (-1) ,

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \leftarrow (-1)L_3$$

Uma vez que na parte esquerda já temos uma matriz identidade, então a parte direita corresponde à solução do sistema.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}$$

ou seja $S = \{(y + 1, 2, -1) \mid \forall y \in \mathbb{R}\}$

∞ . . . ∞

6 Matriz Inversa e Matriz Transposta

Define-se **matriz transposta** duma matriz A , e representa-se por A^T , uma matriz cujas colunas são as linhas de A ordenadas da mesma forma, consequentemente as suas linhas são as colunas de A .

$$A^T = [a_{ij}]^T = [a_{ji}] \tag{18}$$

Como é evidente a dimensão de uma matriz quadrada não é alterada pela operação de transposição, mas para

uma matriz retangular A de dimensão $m \times n$ a sua transposta A^T terá dimensão $n \times m$.

Na transposição duma matriz quadrada os seus **elementos principais** (elementos da diagonal principal) ficam fixos e os restantes são rodados de 180° em torno da diagonal principal. Note-se que uma matriz cuja transposta é igual a ela própria é uma matriz simétrica.

A transposição de matrizes goza das seguintes propriedades:

- (i) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (ii) $(A^T)^T = A$
- (iii) $(AB)^T = B^T A^T$

◇ **Exemplo 40.**

Determine as matrizes transpostas das seguintes matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 5 & 7 & 2 \\ 12 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

As matrizes transpostas das matrizes dadas são:

$$M^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 12 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad N^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} \quad P^T = [1 \quad 0 \quad 4]$$

∞ . . . ∞

Define-se **matriz inversa** de uma matriz A , à matriz B tal que $AB = BA = I$ em que I é uma matriz identidade. Quando essa matriz B existe é costume designar-se por A^{-1} e a igualdade anterior toma a forma

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Ao contrário do que acontece com os números reais, nem todas as matrizes têm inversa. Repare-se no seguinte: para se multiplicar A por A^{-1} , A tem de ter tantas colunas como linhas tem A^{-1} , e para fazer o produto pela ordem contrária A^{-1} tem de ter tantas colunas como linhas tem A , do que resulta que **apenas as matrizes quadradas podem ter inversa** e a A^{-1} terá a mesma dimensão do que A . Como se verá pelo método que se irá utilizar para determinar a inversa de uma matriz, **apenas são invertíveis as matrizes não-singulares**. A inversão de matrizes goza das seguintes propriedades:

- (i) $(A^{-1})^{-1} = A$
- (ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- (iii) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$
- (iv) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Quando para determinada matriz M , a sua inversa coincide com a sua transposta ($M^{-1} = M^T$), essa matriz designa-se por **matriz ortogonal**. Pode provar-se que uma matriz é ortogonal se os vetores que constituem as suas colunas (e as suas linhas) são ortonormados, isto é,

são ortogonais entre si e têm norma unitária. São exemplos de matrizes ortogonais as chamadas matrizes de rotação.

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

A matriz R representa a rotação de um vetor no plano bidimensional de um ângulo θ . E a matriz R_x representa uma rotação de um vetor no espaço tridimensional em torno de eixo dos xx , de um ângulo ϕ .

6.1 Cálculo da Matriz Inversa pelo Método da Condensação

Até ao momento discutiu-se em que condições existe a inversa de uma matriz, no entanto nada se disse sobre o processo de cálculo de matrizes inversas.

O processo de cálculo de uma matriz inversa consiste em construir uma matriz aumentada, tal que no lado esquerdo desta está a matriz que se pretende inverter e no lado direito escreve-se a matriz identidade da mesma ordem. Seguidamente aplica-se a esta matriz aumentada o método da condensação completa descrito na secção 5.2 da página 22, até se obter no lado esquerdo da matriz aumentada uma matriz identidade. Quando tal acontecer, a matriz que se encontra no lado direito da matriz aumentada à qual se aplicou o processo de condensação completa é a inversa da matriz original. Nos exemplos seguintes apresentam-se alguns casos onde se utiliza este método.

✧ **Exemplo 41.**

Pretende-se calcular a inversa da seguinte matriz:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como foi descrito acima para calcular a inversa de uma matriz começa-se por construir uma matriz aumentada, tal que na parte na parte esquerda figura a matriz da qual se pretende determinar a inversa e na parte direita uma matriz identidade da mesma ordem que a matriz à esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Construída essa matriz aumentada, vamos aplicar-lhe o método da condensação completa (método de Gauss-Jordan). Começando por tornar a submatriz esquerda numa matriz triangular superior.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_3 - 2L_2$$

Anulam-se também as entradas acima da diagonal principal de maneira a ter uma submatriz diagonal no lado esquerdo da matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array}$$

Multiplica-se cada linha pelo inverso do respetivo elemento da diagonal principal da submatriz esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow (-1)L_1 \\ \leftarrow (-1)L_3 \end{array}$$

Como já figura uma submatriz identidade na parte esquerda desta matriz, então a submatriz da parte direita é a inversa da matriz inicial.

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

✧ **Exemplo 42.**

Determinar a inversa da matriz N :

$$N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Constrói-se a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Então Inicia-se o método da condensação

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Anulam-se também as entradas acima da diagonal principal de maneira a ter uma submatriz diagonal no lado esquerdo desta matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 + \frac{1}{7}L_2$$

Multiplica-se cada linha pelo inverso do respetivo elemento da diagonal principal da submatriz esquerda

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ \leftarrow \frac{1}{7}L_2 \end{array}$$

Como já figura uma submatriz identidade na parte esquerda desta matriz, então a submatriz da parte direita é a inversa da matriz inicial.

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

∞ . . . ∞

◇ Exemplo 43.

Pretende-se calcular a inversa da matriz:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Constrói-se a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Aplica-se o método da condensação completa.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + L_2$$

Anulam-se também as entradas acima da diagonal principal de maneira a ter uma submatriz diagonal no lado esquerdo desta matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 + \frac{2}{3}L_2$$

Multiplica-se cada linha pelo inverso do respetivo elemento da diagonal principal da submatriz esquerda.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow (-1)L_1 \\ \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \end{array}$$

Como já figura uma submatriz identidade na parte esquerda desta matriz, então a submatriz da parte direita é a inversa da matriz inicial.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

∞ . . . ∞

◇ Exemplo 44.

Pretende-se calcular a inversa da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Começando por escrever a matriz aumentada, tal que na parte na parte direita apareça uma matriz identidade de quarta ordem.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Construída a matriz aumentada, vamos aplicar-lhe o método de Gauss-Jordan.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_4 - L_1$$

Anulam-se também as entradas acima da diagonal principal de maneira a ter uma submatriz diagonal no lado esquerdo da matriz.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - L_4 \\ \leftarrow L_3 + 2L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

Multiplicando a quarta linha por (-1).

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

Como já figura uma submatriz identidade na parte esquerda desta matriz, então a submatriz da parte direita é a inversa da matriz inicial.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

∞ . . . ∞

6.2 Resolução se Sistemas de Equações pelo Método da Explicitação

Uma vez que está estabelecido em que casos existe a inversa duma matriz e também um processo prático para o

seu cálculo, iremos ver como se pode resolver um sistema de equações lineares, recorrendo à matriz inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

Seja o seguinte sistema de equações lineares

$$[A][X] = [B]$$

em que $[A]$ é a matriz dos coeficientes, $[X]$ é matriz das incógnitas e $[B]$ é a matriz dos termos independentes do sistema. Supondo que $[A]$ é invertível, vamos multiplicar à esquerda, ambos os membros da igualdade anterior pela matriz inversa de $[A]$.

$$[A]^{-1}[A][X] = [A]^{-1}[B]$$

Como por definição de matriz inversa $[A]^{-1}[A] = [I]$, e sendo $[I][X] = [X]$, porque $[I]$ é a matriz identidade. Conclui-se que:

$$[X] = [A]^{-1}[B] \tag{19}$$

Então para determinar a solução de um sistema de equações lineares, basta determinar a inversa da matriz dos coeficientes do sistema, multiplicando-a de seguida pela matriz coluna dos termos independentes.

Resta notar, que como se supôs que existe a matriz inversa de $[A]$, apenas podemos aplicar este método se $[A]$ é quadrada e não-singular, isto é, tem característica igual à ordem. Tal facto limita este método a sistemas de equações possíveis e determinados.

✦ **Exemplo 45.**

Pretende-se resolver pelo método da explicitação o sistema do exemplo 30 da página 20.

$$\begin{cases} -2x + y + z = -5 \\ 4x - y + 2z = -8 \\ -6x + 2y - 2z = 8 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na forma $[A][X] = [B]$.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Vamos determinar a inversa da matriz A . Começando por construir a matriz aumentada colocando a matriz identidade à direita da matriz A .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Por condensação anulam-se os elementos abaixo da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_3 + L_2$$

A matriz já é triangular superior, portanto vamos anular também os elementos acima da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_1 + L_3 \\ \leftarrow L_2 + 4L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 - L_2$$

Agora divide-se as linhas pelos elementos da diagonal principal.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow -\frac{1}{2}L_1 \\ \leftarrow -L_3 \end{array}$$

Logo a inversa da matriz A será:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Uma vez calculada a inversa da matriz A , para determinar a solução do sistema basta multiplicar essa matriz pelo vetor coluna dos termos independentes.

$$[X] = [A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema será: $S = \{(1, 2, -5)\}$

∞ . . . ∞

✦ **Exemplo 46.**

Pretende-se determinar a solução do seguintes sistema pelo método da explicitação.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$$

Escreve-se a equação matricial na forma $[A][X] = [B]$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calcula-se a inversa da matriz dos coeficientes do sistema. Escreve-se a matriz aumentada e condensa-se até ficar uma matriz identidade na parte esquerda dessa matriz.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right] \leftarrow L_1 + 3L_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \leftarrow \frac{1}{2}L_1$$

$$\leftarrow -L_2$$

Assim, a inversa da matriz A fica

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Então para determinar a solução multiplica-se a inversa de A pelo vetor coluna dos termos independentes do sistema.

$$[X] = [A]^{-1}[B] = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A solução do sistema será: $S = \{(-13, 10)\}$

∞ . . . ∞

Exercício 20.

Das seguintes matrizes, inverta as que forem invertíveis.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}; \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad N = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exercício 21.

Resolva os sistemas de equações dos exercícios 18 e 19, pelo método da explicitação, ou seja, através do cálculo da inversa da matriz dos coeficientes do sistema.

Soluções dos Exercícios

1 (a) A matriz M tem duas linhas; (b) A matriz M tem seis colunas; (c) M é de dimensão 2×6 ; (d) $m_{12} = -10$, $m_{22} = 1$, $m_{14} = x + y$, $m_{23} = \frac{4}{5}$ e $m_{25} = x$.

2 (a) Todas as matrizes; (b) As matrizes B, D, F ; (c) As Matrizes A, B, D, E, F ; (d) As matrizes B, C, D, F ; (e) As matrizes B, D ; (f) A matriz D .

3 (a) As matrizes Q, R, S, U, W e X ; (b) Vetor linha; (c) Matriz triangular superior; (d) Matriz identidade de terceira ordem; (e) Matriz diagonal; (f) Vetor coluna; (g) As matrizes R, S, T, U e X ; (h) As matrizes R, S, U e X ; (i) (4×3) ; (j) Nenhuma; (k) $t_{12} = 1$, $t_{33} = -\frac{3}{2}$, $p_{13} = 0$, $r_{21} = 0$, $v_{41} = 1$, $w_{32} = \sqrt{5}$, $x_{33} = 7$, $u_{23} = 0$ e $s_{22} = 1$; (l) $H = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 5 & \sqrt{3} & 6 \end{bmatrix}$

4 (a) $d = 2, g = -4$ e $h = 2$; (b) $d = 0, g = 0$ e $h = 0$

5 (a) $d = 2, g = -4$ e $h = 2$; (b) $d = 0, g = 0$ e $h = 0$; (c) $d = 0, g = 0$ e $h = 0$; (d) Por exemplo, $d = 1, g = 2$ e $h = 3$; (e) $d = 0, g = 0$ e $h = 0$; (f) Por exemplo, $f = 0, h = 8$ e $i = 0$; (g) Por exemplo, $f = 2, h = 0$ e $i = 0$; (h) Por exemplo, $f = 0, h = 0$ e $i = 5$; (i) $f = 0, h = 0$ e $i = 1$.

6 (a) $\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ -3 & 1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 0 \\ -3 & -1 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$;

(d) Não se podem adicionar as matrizes porque estas não têm a mesma dimensão; (e) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 6 & 3 \\ -1 & 7 & -\frac{1}{3} \\ -5 & 0 & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 7 & -9 \\ 11 & 8 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} \frac{10}{3} & 7 & -1 \\ -2 & 5 & \frac{14}{3} \\ 5 & -1 & \frac{21}{5} \end{bmatrix}$; (h) P

7 (a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -19 & 4 \\ -1 & -39 \end{bmatrix}$; (d) Não se podem operar as matrizes porque estas não têm a mesma dimensão; (e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 8 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & -4 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$; (g) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -4 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$;

(h) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 7 \\ -1 & 4 & \frac{3}{2} \\ 3 & -7 & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$; (i) $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -17 \\ -5 & -1 & -7 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix}$;

(j) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 10 \\ 3 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & 0 \end{bmatrix}$; (k) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{15}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8 (a) $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 8 & 4 & -5 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 12 & 2 \\ -1 & 19 & 21 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix}$

9 (a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 10 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 10 & -1 & -3 \\ 35 & 4 & 27 \\ 11 & 1 & 12 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 71 & -28 & 49 \\ -7 & -4 & -17 \end{bmatrix}$

10 (a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 18 & 20 & 22 & 24 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 7 & 8 \\ 10 & 9 & 11 & 12 \\ 14 & 13 & 15 & 16 \end{bmatrix}$;

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M$; $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M$;

$M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; $M \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;

$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11 (a) $\begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 20 & 26 \\ -12 & -20 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -7 \\ 12 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} x-2y \\ 3x+5y \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ 8 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} 11t \\ -6t \\ -5t \end{bmatrix}$; (h) $\begin{bmatrix} -x+2y+3z \\ -y-3z \\ 2x-y+2z \end{bmatrix}$; (i) 1; (j) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$;

(k) $\begin{bmatrix} 10 & 3 & -4 \end{bmatrix}$; (l) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4}+4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ -5\sqrt{2} & -1 & -2 \\ -\frac{3}{2}+5\sqrt{2} & 1 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$;

(m) $\begin{bmatrix} \frac{9}{16}-\frac{13}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{3}{4}\sqrt{2} & 1+\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{3}{4}+3\sqrt{2} \\ \frac{5}{2}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{4}-6\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

(n) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}+16\sqrt{2} & \frac{9}{4}+4\sqrt{2} & 4+8\sqrt{2} \\ -20\sqrt{2} & -1-5\sqrt{2} & -10\sqrt{2} \\ \frac{3}{2}+20\sqrt{2} & -\frac{1}{2}+5\sqrt{2} & -\frac{21}{2}+10\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

(o) $\begin{bmatrix} 2x+6y-7 \\ -4y+12 \end{bmatrix}$; (p) $\begin{bmatrix} -26 \\ 24 \end{bmatrix}$; (q) $\begin{bmatrix} 11 & 38 \\ -58 & -52 \end{bmatrix}$;

(r) $\begin{bmatrix} -4 \\ 21 \\ -2 \end{bmatrix}$; (s) $\begin{bmatrix} 14 & 28 & -28 \\ 4 & 8 & -8 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$; (t) $\begin{bmatrix} -1 & -9 & -7 \\ -10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 11 \end{bmatrix}$;

(u) $\begin{bmatrix} 18 \\ -42 \\ 39 \end{bmatrix}$; (v) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

12 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 28 & 1 \\ 17 & 3 \end{bmatrix}$

14 $V = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 2 & \frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

15 (a) $Y = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 12 & 11 & 23 \end{bmatrix}$; (b) $X_{(2 \times 3)} = 0$, matriz nula;

$Z = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16 Deve-se escrever uma matriz para cada tabela e multiplicar a matriz da primeira tabela pela matriz da segunda, o resultado dessa multiplicação será:

$$\begin{bmatrix} 65 & 157.5 & 127.5 & 165 \\ 70 & 147.5 & 122.5 & 150 \\ 52.5 & 182.5 & 142.5 & 132.5 \end{bmatrix}$$

17 As matrizes A, C, D, F e J são quadradas e têm todas característica igual à ordem, este tipo de matrizes têm linhas linearmente independentes e obviamente as colunas também.

As matrizes B, E e I , são quadradas e todas têm a característica uma unidade abaixo da respectiva ordem, por isso as suas linhas são linearmente dependentes e obviamente as suas colunas também.

A matriz G tem $r = 3$, as suas linhas são linearmente independentes mas as suas colunas são linearmente dependentes.

A matriz H tem $r = 2$, as suas linhas são linearmente dependentes e as suas colunas são linearmente independentes.

18 (a) $(-5, 1)$; (b) $(4, 6)$; (c) $(-1, 0)$; (d) $(1, 13)$; (e) $(-1, 3)$; (f) $(\frac{1}{5}, -1)$; (g) $(10, 15)$; (h) $(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$; (i) $(-2, 0)$; (j) $(12, -\frac{7}{2})$; (k) $(\frac{5}{48}, \frac{35}{24})$;

19 (a) $(1, -2, 2)$; (b) $(0, 3, -1)$; (c) $(-2, 3, 3)$; (d) $(1, 2, 4)$; (e) $(-5, 2, 3)$; (f) $(1, -2, 1)$; (g) $(-\frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2})$;

20 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{15} & \frac{1}{15} \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$;

$$C^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$E^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}; \quad F^{-1} \text{ não}$$

$$\text{existe; } G^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad H^{-1} \text{ não}$$

$$\text{existe; } K^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix};$$

$$L^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -5 \\ -4 & -4 & 3 & 5 \\ 3 & -12 & -6 & 0 \\ 6 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 18 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$N^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

21 Igual aos exercícios 18 e 19.